TURING 图灵新知

Crimes and Mathdemeanors

数学小神探

[美] Leith Hathout 著

[美] Karl H. Hofmann 插图

辛再甫 译



人民邮电出版社

POSTS & TELECOM PRESS



图灵新知

Crimes and Mathdemeanors

数学小神探

［美］ Leith Hathout 著
［美］ Karl H. Hofmann 插图
辛再甫 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

数学小神探/（美）哈休特（Hathout，L.）著；（美）霍夫曼（Hofmann，K. H.）绘；辛再甫译. —北京：人民邮电出版社，2009.7

（图灵新知）

书名原文：Crimes and Mathdemeanors

ISBN 978-7-115-20726-5

I. 数… II. ①哈…②霍…③辛… III.数学－普及读物 IV.O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第057750号

内 容 提 要

14岁的数学神童拉维利用数学推理，帮助周围的人们破案，解决了一个又一个迷案。本书每段故事通过一些疑案的破解，讲述了数学技巧在生活中的应用。在每个故事中，作者都启发读者自己解决问题，然后解释找到谜底所用的数学知识。

本书能够激发中学生用全新的眼光看待数学课，培养对这一课程的学习兴趣，是中学生理想的课外读物。本书作者是美国加州的一名中学生，更能对同龄的读者大有启发。

图灵新知

数学小神探

◆ 著 [美]Leith Hathout
插图 [美]Karl H. Hofmann
译 辛再甫
责任编辑 明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000 1/16
印张：10.25
字数：111千字 2009年7月第1版
印数：1-4 000册 2009年7月北京第1次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2008-3331号

ISBN 978-7-115-20726-5/O1

定价：25.00元

读者服务热线：（010）51095186 印装质量热线：（010）67129223

反盗版热线：（010）67171154

版 权 声 明

Original English edition, entitled *Crimes and Mathdemeanors* by Leith Hathout, ISBN: 978-1-56881-260-1, published by A K Peters, Ltd.

前　言

> 自然这部大书在我们眼前铺开，哲学于其中书就……但我们若不首先掌握书写她的语言与文字，我们便无法领会其奥妙……她是用数学语言书写的……
>
> ——伽利略

像上面这样的名言揭示了数学作为掌握物质世界规律不可或缺的工具的巨大价值，但同时它们也使数学好像很严肃、令人生畏、让人有压力。我喜爱数学可不是因为它的价值，而是因为它的趣味性，因为它的美。

我喜欢解题时的灵感突现，那会给你一种“啊哈”的感觉。我也喜欢经过不懈的脑力劳动后终于解出一道题的疲惫感觉，因为那是胜利后的疲惫。更多的时候，我会享受数学总能带给我的惊奇，它有时会彻底颠覆我的直觉，推翻我的常识。

在小学的时候，我最爱读的书是唐纳德·J·索博尔的推理小说系列《百事通布朗》（*Encyclopedia Brown*）。主人公百事通[①]使用逻辑推理和各种知识破解一个个难解的迷案，让我惊奇不已。等我长大一点，迷上了数学后，我开始想象着一位像百事通一样的少年侦探，他在破案时不仅仅运用逻辑推理，还用到严格的数学知识。我构思了一些故事，想看看这种想法能否实现。你看的这本书就是我摸索的结果，我试着塑造了一

① Encyclopedia意为百科全书，是小说中人们给主人公取的绰号，因为叫得久了，他的真名已经没有人提及，这里权且译作“百事通”。——译者注

位百事通这样的角色，他将向你展现数学给我的神秘感和我从数学里发现的乐趣。有趣的是，在我写作的时候，电视连续剧《数字追凶》开始热播，让我看到了希望：数学侦探的主意确实有可能吸引众多的读者。

我的目标读者是我的朋友和像他们一样的年轻人——他们喜欢数学但还不至于喜欢到坐下来潜心阅读数学课本或啃难题，但当他们读到破案或解智力题的内容，要和故事主人公拉维竞逐智力时，他们也许会自觉地用上数学思维。因此，本书的数学内容差不多都限于高中水平，就是不想让读者觉得超过了他们的理解力。

我为书中破案的年轻数学神探安上拉维这个名字，这值得说道说道。他是根据斯坦福大学数学系老师拉维·瓦基尔的名字而取的。当我对数学越来越“认真”时，我珍爱的图书中就有瓦基尔博士的《数学万花筒：模式与解题》(*A Mathematical Mosaic: Patterns & Problem Solving*, Brendan Kelly Publishing, Burlington, Ontario, 1997)。它的趣味性和严谨性正对我的口味，书中还生动地介绍了拉维·瓦基尔所知道的年轻数学家。因此，我决定给我的小英雄取瓦基尔博士的名字。我要声明的是，瓦基尔博士并不认识我，我给我的小侦探取名时也没有征求过他的意见。我由衷地希望他不会介意我的做法。

本书中的侦探故事涉及的数学问题来源不一，我在书后专门介绍了它们的出处。我向所有对数学感点兴趣的读者强烈推荐这些图书。遗憾的是，读了这么多年的数学书，做了许许多多的数学题后，我有时只能记起问题，而想不起来到底从哪儿看到的它。只要我能记起故事的核心数学问题的来源，我都会

把它附上。对于没能指明来源的数学问题，我谨向相关作者表达歉意，请原谅我未能向您致谢。还有一个复杂的原因是，数学问题经常会在许多书中出现，尤其是当它们广为流传，成为数学“传说”的一部分时。这就非常难以把某一问题的原创归功于哪一个人。无论如何，我要说绝大多数的问题都不是我发明的——只有少数几个是我的功劳。但是，我把这些问题进行了改编，以便融入有趣的故事里。我还试着给出问题的新颖解法，为的是使这些解法适合我的目标读者的口味。

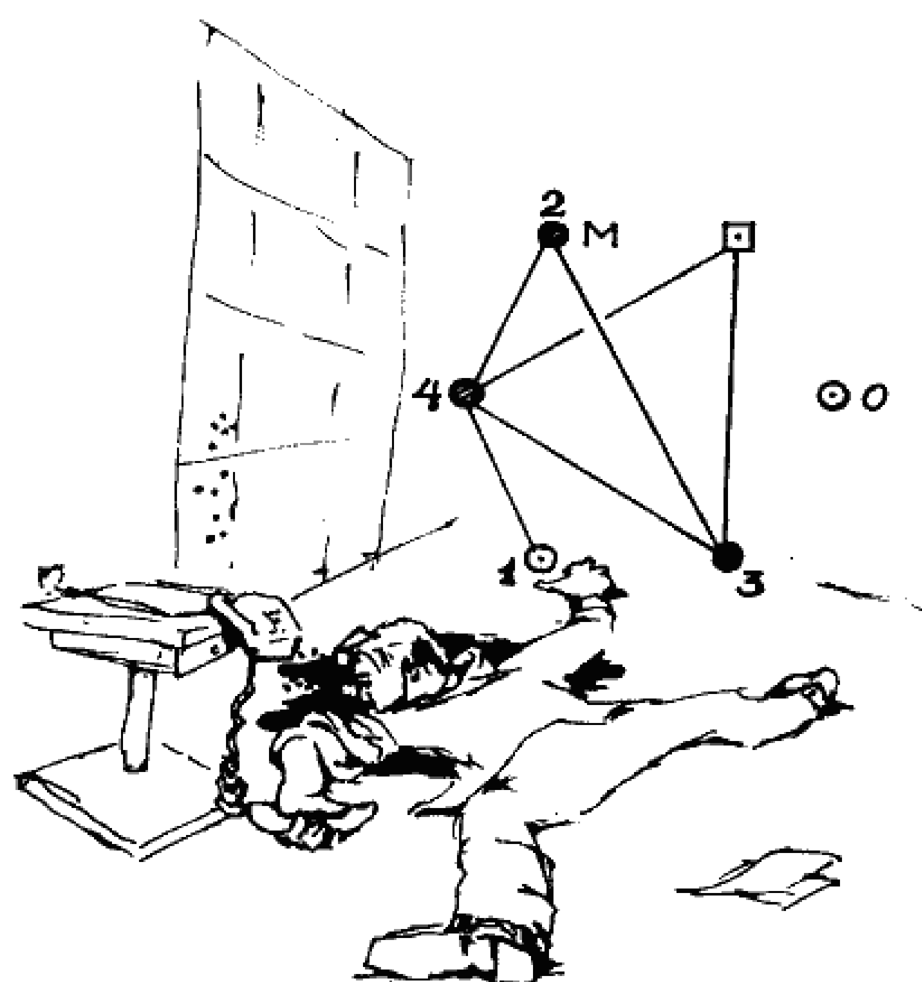
我希望你们，我的读者，从本书体会到我创作它时体会到的乐趣。倘若它像《数学万花筒》点燃了我对数学的热情一样，也激起你们对数学的某些兴趣，我将不胜感激，并为之自豪。

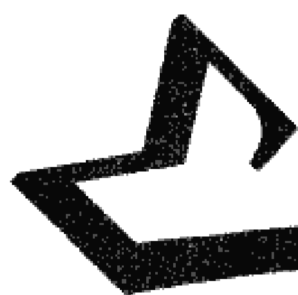
致　谢

我知道，对我这个年龄的人来说，写书是不太寻常的事，更不用说写一本数学书了。没有父母的鼓励，没有优秀的出版人克劳斯·彼得斯先生的鼎立支持，这是不可能的。我非常感谢凯瑟琳·索查博士仔细审阅了全部书稿，提出了许多有用的建议，并指出和修改了曾经出现的错误。我还要衷心感谢卡尔·霍夫曼博士，他也审阅了这些故事，提出了有用的意见，特别要感谢他提供了精彩活泼的插图，它们确实使这些故事增添了活力。对夏洛特·亨得森女士，我的谢意无以言表。她指导了本书的写作到出版的各个环节，对每一个环节都一丝不苟。她审读、编辑和修改了书稿，重绘了图表。正因为她的大量付出，这本书才变得更漂亮、更有特点、更活泼、更完美。

最后，我要特别感谢我的父亲。他看了我最初的几个故事后，就建议用一个像百事通布朗那样的数学侦探串连起这本书。他是位医生，当时正在全力写作一本医学教材。他鼓励我实现写书的想法，承诺我们将找到并肩工作的方法：我写我的书，他写他的书。他的承诺兑现了。

目 录


2
M
4
1
3



西克莫里凶杀疑案

拉维迈上西克莫里423号修剪一新的大草坪。两辆警车闪着警灯，停在这幢矗立着高大廊柱的白色大宅子的车行道上。拉维经过警车时，警察对他点点头。拉维今年14岁，是个秀气的男孩，卷曲的棕色头发下忽闪着一对机灵的棕色大眼睛。警察让一个十几岁的男孩在谋杀案现场出现可不是件寻常事，但拉维不是个普通的男孩。人们都知道他是一位天才人物，尽管他自己很谦虚，认为自己只是个爱玩填字游戏，爱对各种问题尤其是数学问题穷根究底的角色。他在这方面的神奇本领很得芝加哥警察局刑侦队长多布森的赏识。多布森队长的儿子安迪和拉维是十年级同学，正是通过安迪多布森队长才认识了拉维。一天晚上，拉维在多布森家吃晚饭，多布森队长正巧碰上个棘手的案子，拉维听说案情后只用了几分钟就破了案。自那以后，多布森队长每当遇到特别挠头的案子总会请拉维帮忙。

宅子的豪华雕刻木门半掩着，拉维敏捷地跳上通向木门的四级台阶，走进大理石门廊。

“你好，拉维，见到你太棒了。”多布森队长说。

“队长好，”拉维回答道，“有什么线索吗？”

多布森队长引着拉维走进客厅。

“这两位是阿登博士和夫人[①]。很不幸，他们家今天发生了一起凶杀案。”多布森队长说。

“真不幸，”拉维说，“我能做点什么呢，队长？”

“死者罗斯莫因医生[②]，男性，是阿登家的朋友。今天下午前晌他在书房遇害，一发子弹从他的后脑勺射入。显然他正背对着房门打电话，他被发现时身旁的听筒还掉在电话绳下面摇晃。”

“谁发现的？”拉维问。

“是我，”阿登博士回答。拉维转过身面向阿登博士夫妇。博士夫妇十指相扣依偎在小沙发上。

“请告诉我当时的情景。”拉维说。

阿登博士开始回忆这顿悲惨的烧烤午餐的情景：“我们邀请了一些朋友到家里搞周日聚餐。我们请了唐·罗斯莫因、温特沃思夫妇和芬尼根夫妇。他们在11点到11点半之间到达。我们的活动范围就是后院和楼上的娱乐室。我们一边吃烧烤，一边聊天，一边看篮球赛。你知道，这不过就是个平平常常的懒散的周日。我大多数时间都在外面池塘边烧烤，而斯泰茜（他看着妻子）则在厨房和娱乐室间来回忙碌。我烧烤时和阿提·温特沃思聊一些政治话题，其他人在楼上娱乐室看球。聚会期间我没怎么看见唐。他不太喜欢日光。实际上我以为他已经走了——我以为医院里有急诊。”

“有人看到他离开吗？”拉维问。

---

① 英语中的Dr.既可指博士，又可指医生，从后文可知，此时拉维不能从多布森队长的介绍中得知阿登先生究竟是博士，还是医生。——译者注

② 从多布森队长的介绍中同样无法辨别罗斯莫因先生是医生还是博士。——译者注

“没有，确实没有。”阿登博士答。阿登夫人也轻轻地摇摇头。

“你为什么认为医院有急诊呢，阿登大夫？”拉维问。

“我想鲍勃·芬尼根出来看我烤得怎么样时提到过那么一点。他喜欢吃烤得老一些的牛排。我猜唐要打电话，所以才问了鲍勃我们家的电话在哪儿，而鲍勃告诉他电话在楼下书房里。鲍勃问了我是不是对的，我说是在书房里。后来我们就都沉浸在篮球比赛里了——公牛队被拖进了第二个加时赛。当我注意到他不在时，我还以为他已赶到医院去了。要知道，这就是产科医生的生活。婴儿可不能等。”

“看来他是你在医院的同事罗，阿登大夫？”

“不，不。我是大学教授，我是社会学博士。”

“那么你是怎么认识死者的呢，阿登博士？”

出现了一阵尴尬的沉默。阿登博士和夫人彼此看了看，阿登博士深吸一口气，说：“他是——是——我们的医生。我们一直想要个孩子，就去找了他。自那以后我们就算成了朋友，时不时走动。我们走得不是特别近，但他和我们的其他几个客人是朋友，况且他妻子正好去外地了，索性就把他也叫上了。”

“你是怎么发现他的呢，阿登博士？”拉维轻轻地抓了抓下巴问。

“客人们走后一会儿，我走进书房，就看见他趴在地上，流了一大滩血。太可怕了！”

拉维继续着他的问询，而多布森队长陪在一旁，并没想打断他，尽管这些问题大都问过也答过了。“宅子里还有别的人吗？比如保姆或小孩？”

“没有，”阿登博士回答，“周日保姆休息。我刚说过，我们没有孩子。芬尼根夫妇把孩子丢在了家里，温特沃思夫妇也没有孩子。”

“但朱莉·温特沃思怀孕了。”阿登夫人插话道。

“你记得哪个客人先走的吗，阿登夫人？”拉维问。

“他们是一起走的。”阿登博士答。

“肯定吗？”拉维问。

“肯定。我和斯泰茜送他们到小车边上，我们握手道别后他们才离开。我通常有点心不在焉，但这回我记得特别清楚，因为他们上车前，我刚好问了芬尼根夫妇和温特沃思夫妇，还有斯泰茜，他们刚才握了多少次手——和我正在从事的一项有关社会习俗变化的研究有关——结果他们每人给我的答案都不一样，这使我非常好奇。”

拉维轻轻地扬了扬眉毛，目光投向空中，若无其事地问：“你还记得他们的回答吗？”

“不。你知道，这正是我容易心不在焉的地方。”

“那倒是，”拉维说，一边转向斯泰茜·阿登，“你记得他们是怎么说的吗，阿登夫人？”

“不，不记得。”她答道。

“那你记得你握了多少次手吗？”

“记得，4次。我和所有客人都握手了。”她犹豫了一下回答道。

“我们还知道些别的吗，队长？”拉维看着多布森队长说。“你们跟芬尼根夫妇和温特沃思夫妇谈过了？”

“当然谈过了。我的几个手下还在他们家。他们说的跟这

很吻合。鲍勃·芬尼根说唐·罗斯莫因问他电话的事，他就告诉罗斯莫因他只知道有部电话在书房里，但在阿登夫妇卧室里可能也有一部。后来大家都被球赛吸引住了，以为罗斯莫因医生已经离开。”

“有人听到枪响了吗？”拉维问。

“没有，显然没有。但他们都说电视声音太大，他们都在对着球员大呼小叫。迈克尔·乔丹投篮不太稳定，但有些黏球。”队长回答。

队长挺起头示意拉维出门。队长探着身子紧随着拉维，“我们没找到凶器。手下正在芬尼根和温特沃思家寻找。但有人可能有作案动机。我们发现鲍勃·芬尼根是一名办公室管理员，曾为罗斯莫因医生工作，但几年前罗斯莫因转到慈济医院行医后，不得不辞掉了他。芬尼根声称没觉得不爽，并说他们是要好的朋友。显然慈济医院有它自己的管理员，这也是罗斯莫因辞掉他的原因。还有，罗斯莫因在认识他妻子前曾经约会过朱莉·温特沃思。但朱莉说这是很久以前的事了，而且他们都已决定不再来往，并保持着良好的朋友关系。”

“有意思，”拉维若有所思地说，“我们还掌握别的线索吗？”

“是的，”队长继续着，仍然侧着身子，悄悄地说，“我们想到开枪的人手上应该有火药残留，便对每个人做了火药残留的石蜡检测。鲍勃·芬尼根手上检测出了火药残留。但我想我们的检测可能被污染了，朱莉·温特沃思和斯泰茜·阿登手上也有火药残留，其他人则都没有。”

“罗斯莫因医生带寻呼机了吗，队长？”拉维问。



“什么？”

“就是寻呼机，BP机，医生们常带的。我知道这是周日，但他带着他的BP机了吗？”

队长看起来有些恼火，“我不知道。我们没注意到，我这就打电话到法医办公室，让他们马上检查一下。我们有一个人在那儿。”

队长掏出手机打电话，拉维则出门在草坪上漫步，看着脚下茂密的青草，呼吸着傍晚清凉的空气，拉维陷入了沉思。

队长跑着跟了过来。“你料事真准，拉维。他口袋里还真有一个BP机。他们检查了他的寻呼记录，有人在12:49呼他。BP机设在振动，所以我想别人听不到有人呼他。我的人打了BP机上的电话，接电话的是慈济医院的总机。所以，我说你料事真准，但这对我们破案还是没什么帮助。我们仍然是一头雾水。”

“不，没那么糟，队长。”拉维说着走向车行道边取他的自行车。多布森队长知道拉维得回家吃晚饭了。“我想这案子已破了。”拉维微笑着说，一边跨上他的自行车。

“破了?！”多布森队长睁大眼睛狐疑地问。

“是的。”拉维说。他踩着自行车驶出车行道，到了大街上后，他转过头对多布森队长说：“凶手是……”

现在，该你显示你的智慧了。你知道谁杀害了罗斯莫因医生吗？

分析

当晚，拉维和父母吃过晚饭后，多布森队长驾车来到了他家，问他怎么就破了案。拉维笑着说："实际上是阿登博士帮我破了案，队长。案子中出现了一个小小的逻辑问题——问题出现在斯泰茜·阿登应该跟多少个人握手上。"

拉维接着说："假设你和你妻子办个晚宴，邀请了两对夫妇。晚饭后你们俩把他们送到门口，大家互相握手道别。显然，丈夫是不会握妻子的手的，反过来也一样。碰巧你问了每个客人及你妻子各握了多少次手。现在假设每个人的答复都是不同的。"

"好的。"队长说。

"那么你妻子握了多少次手呢？"拉维问。

"什么？"队长答道，好像没听懂拉维的问题。

"你妻子和多少人握了手呢？"拉维重复道。

"我不知道。你没告诉过我，我怎么可能算得出来？我没有足够的信息。话说回来，这又有什么关系？这与我们的案子有关吗？"

拉维把案子的细节提炼成一个简单的问题，问题的答案解出来，案子也就破了。多布森队长算不出这个问题。如果你能算出来，你就像拉维一样能破案了！

求解

为了解出此问题，我们需要"透过现象看本质"。这里似

乎没有足够的信息供多布森队长判断他妻子握了多少次手，或者供我们判断阿登夫人握了多少次手。但是如果我们仔细思考问题的陈述，就会找到唯一的答案。

既然信息好像不充分，那么我们拥有的每一个细节都很关键。我们面对的局面是阿登博士和夫人邀请了两对夫妇，我们也知道配偶间是不会握手的。现在，两个关键事实应该引起注意。

1. 任何人握手的次数最多为4次。这是因为总共有6个人，由3对夫妇组成，任一人不同自己握手，也不同其配偶握手，这样就只剩下4个人同其握手。

2. 阿登博士询问他夫人和两对夫妇（共5人）他们握手的次数，而且能肯定每个人给的答复是不同的。因为最大的次数是4次，且5个人握手的次数是不同的，则阿登夫人及两对夫妇的握手次数只能分别是0，1，2，3，4次。我们注意到阿登博士握了多少次手并未提及，因为他没有向自己发问。因此，只须考虑其他5个人。

在继续往下之前，从这些关键事实，我们实际上可以推导出另一个规律。考虑握手4次的人。他不和自己握手，也不和妻子握手，所以他和剩下的4人都握了手。那么他的妻子一定握了0次手，因为其他每个人都和她丈夫握了手。因此，我们有一条附加定律：如果某人握手4次，则其配偶必握手0次。

现在，我们尝试着弄清楚，这些事实是否为我们算出阿登夫人实际上握手多少次提供了足够的信息。她声称握了4次，因此我们首先检验这种可能性，见图1，图中每个人都用其首字母代表。

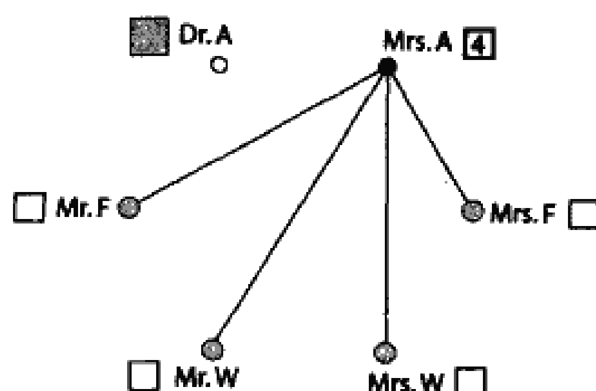


图1 A夫人握手4次

如果阿登夫人握手4次，显然她的客人无人握手0次，因为她和他们每个人都握了手。因此，这种可能性被排除。

类似地，我们可以考察阿登夫人是否可能握手0次。在这种假设下，其中一个客人一定握手4次，就假定是W先生吧。他不可能同W夫人握手，因此他一定同F夫妇和A夫妇握了手，这与A（阿登）夫人握手0次的假设矛盾。

现在可以考察阿登夫人握手1次的可能性了，我们用图2表示。

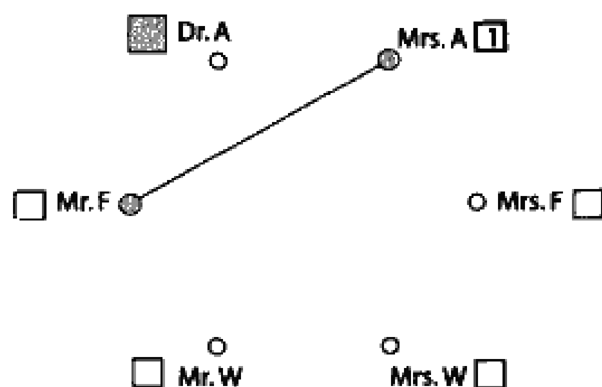


图2 A夫人握手1次

考虑到对称性，阿登夫人同谁握手无关紧要。我们假定是F 先生。她现在不可能再跟其他任何人握手了，因为根据假设，

她只握了1次手。F先生一定是握4次手的那个人，因为别的人不能与A夫人握手，他们最多只有3次可能的握手机会。因此我们有图3的情景。

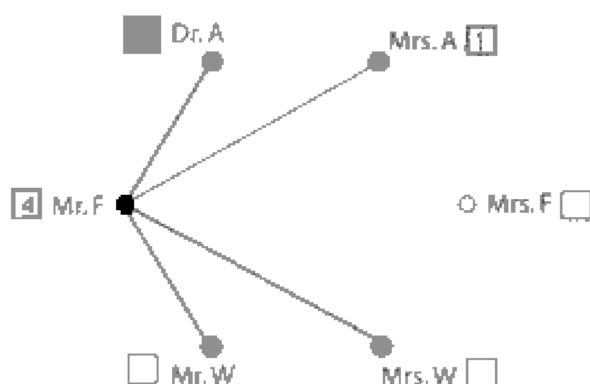


图3　A夫人握手1次，F先生握手4次

因为F先生握手4次，根据我们的附加定律，F夫人一定是握手0次的人。现在W先生及夫人必须握手2次和3次。但这是不可能的。我们来考察W先生（对W夫人来说，情况是对称的）。他不可能与W夫人（他的配偶）、F夫人（她握手0次）以及A夫人（根据假设她只握手1次且是与F先生），因而W先生只能与A博士和F先生握手，所以，他不可能握手3次。因此，A夫人不可能握手1次。

现在假定A夫人握手3次，示于图4。则她必须与某一对夫妇都握手，而与另一对夫妇中的一位握手。假设她与F夫妇都握了手，且与W先生握了手。于是W夫人只能握手0次（其他人，不包括A博士，都与A夫人握了手）。由此得出W先生一定是握手4次的人。（不可能是F夫妇，因为要握手4次，他们都须与W夫人握手，但这与我们的附加定律矛盾。）

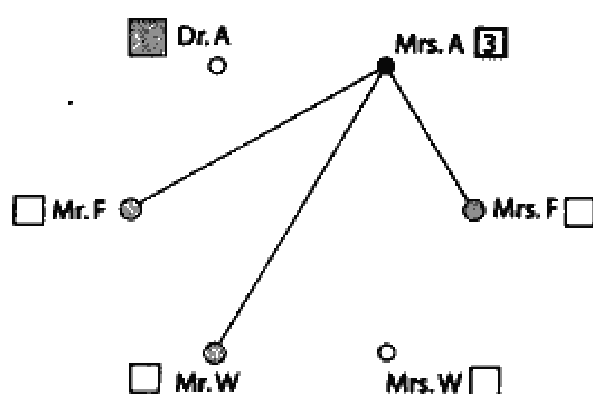


图4 A夫人握手3次

因此，除了A夫人，W先生还与A博士、F夫妇握了手，如图5所示。

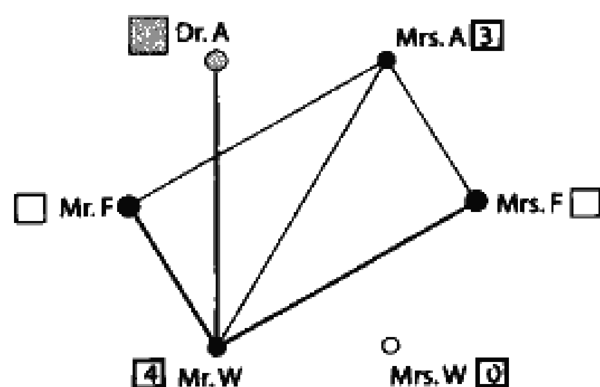


图5 A夫人握手3次，W先生握手4次

现在就出问题了：没有人只握手1次，因为还不曾赋值的两个人（F先生和F夫人）都已经握过两次手了。所以，A夫人不可能握手3次。

至此，我们只有A夫人握手2次唯一一个选择了。如果是这样，则有两种可能：要么她只与一对夫妇（比如F夫妇）握了手，要么她与两对夫妇中的各一位（比如F先生和W夫人）握了手。我们来看看第一种可能，示于图6。

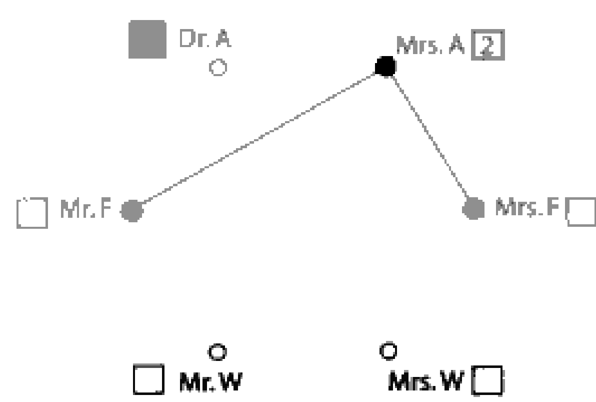


图6 A夫人与同一对夫妇握手，共握手2次

现在，与A夫人握手的人中必须有一人握手4次。（不可能有客人没同A夫人握手却握手4次。）但是我们已经知道，握手4次的人，其配偶必握手0次；换句话说，如果F先生握手4次，则F夫人必握手0次。然而这是不可能的，因为根据假设，F夫人已与A夫人握手。

现在只剩下唯一的情节了，也就是说，A夫人握手2次，但不是与一对夫妇。考虑到对称性，可以假定A夫人分别与F先生及W夫人握了手，如图7所示。

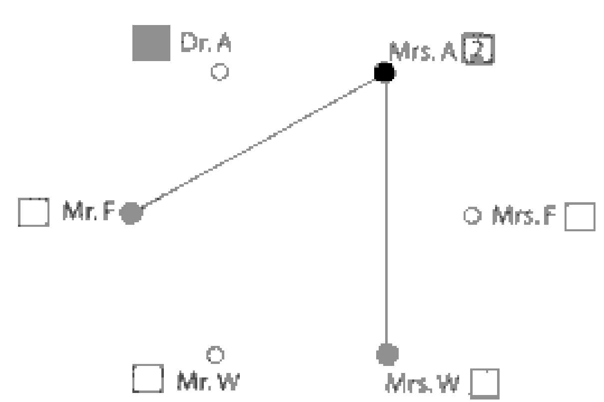


图7 A夫人握手2次，与每对夫妇各握手1次

现在，为了把情节演示完，要么F先生握手4次而F夫人握手0次，要么W夫人握手4次而W先生握手0次。仍然根据对称

性，我们假定F先生握手4次而F夫人握手0次，如图8所示。

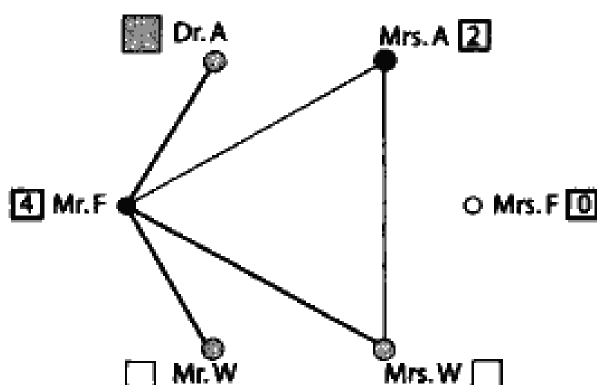


图8　A夫人握手2次，F先生握手4次

现在，1次握手和3次握手只能由W夫妇分配了。W夫人已经握手超过1次，因此W先生只能握手1次，是与F先生（见图）。W夫人的前两次握手是与A夫人及F先生；因F夫人握手0次，W夫人的第3次握手是与A博士。完整的情景示于图9。

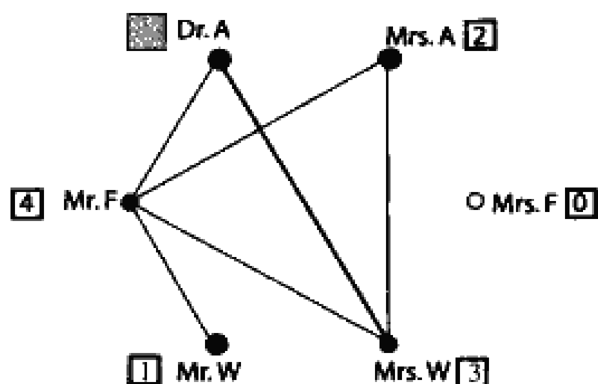


图9　握手0次、1次、2次、3次和4次的情况

现在，结果出来了，而且其中没有矛盾！问题只有此一解（或其对称情况）。这真是个令人吃惊的神奇结果。我们从已知信息不足的局面出发，最后得出的结论是，我们不仅知道阿登夫人精确地握手2次，而且知道她一定是与不同的夫妇握了2次手。

本案中，阿登夫人和鲍勃·芬尼根及朱莉·温特沃思握了手。阿登夫人枪杀了罗斯莫因医生，她的右手沾上了火药残留。随后她污染了鲍勃·芬尼根及朱莉·温特沃思的手，这是她仅有的2次握手。阿登夫人倒霉就倒霉在，那两个人是到最后才同她握的手，这就给拉维破案提供了线索。

拉维把答案向多布森队长解释后，要他检查阿登夫人的家和她周日的手机通话记录。果不其然，阿登夫人的手机在12:49呼了罗斯莫因。她留的是慈济医院的号码，诱使罗斯莫因去书房回电话。她趁其他人都沉浸在篮球赛中的时候，向罗斯莫因开了枪。她不得不承认这些事实，包括她在握手次数上的撒谎。原来，她一直抱怨罗斯莫因未能帮她怀上小孩。芬尼根夫妇已经有小孩了，当她后来发现朱莉·温特沃思也怀孕了时，她便失去了理智，迁怒于罗斯莫因。

看吧，拉维又破了一个案子。现在，该睡觉了，因为拉维周一早晨还有数学测验呢。

拓展

对本案的思考实际上有助于证明一个非常有趣的定理。

一家主人和妻子邀请 x 对夫妇到家里吃饭。在告别时，人们互相握手，当然，没有人会跟自己的配偶握手。如果主人问妻子及其余的 $2x$ 个人他们握手多少次，他们每个人的答复都彼此不同，则妻子握手 x 次。

证明这一定理的最佳方法是数学归纳法。这种方法依赖于下面两个支柱。

1. 证明定理对单个基本情形，通常是某个小的数成立。

2. 证明如果定理对某个$x=n$成立，则其对$x=n+1$也成立。

上述两个子证明合在一起，就可以证明定理对所有x都成立。

我们用记号$P(x)$表示主人妻子的握手次数，如果他们邀请了x对夫妇而且每个人根据上面的规律握手的话。我们需要证明对所有可能的x，$P(x)=x$成立。

这里我们的基本情形是$x=2$，我们已经在本案的分析中证明了$P(2)=2$。这意味着如果主人邀请了2对夫妇，则主人妻子握手2次。因此我们已经证明了对$x=2$的基本情形，$P(x)=x$成立。

现在，如果我们证明了"对任意$n\geqslant 2$，若定理对$x=n$为真，则其对$x=n+1$也为真"，则$P(2)=2$为真蕴涵$P(3)=3$，后者随之蕴涵$P(4)=4$，等等，所以，对任何x，$P(x)=x$，只要满足条件"配偶间不握手且每个人告诉主人的握手次数是不同的"。

注意，在定理的假设条件下，x对夫妇加上主人的妻子，被问到的人数为$2x+1$。最大的握手次数为$2x$。(连同主人在内，在聚会的$2x+2$个人中，握手次数最多的人不会和自己及自己的配偶握手，所以可能的握手次数只剩下$2x$次。）因而被问到的$2x+1$个人的答案的范围为0至$2x$。也请记住，我们已经证明，握手$2x$次的人，其配偶一定握手0次。

现在，我们假定$n+1$对夫妇受到了邀请。那么，最大可能握手次数为$2\times(n+1)=2n+2$。聚会中共有$2n+4$个人，包括主人在内。他问$2n+2$个客人及他妻子（总共$2n+3$个人）各握手多少次，每个人的答案都不同，其范围为0至$2n+2$。(记住

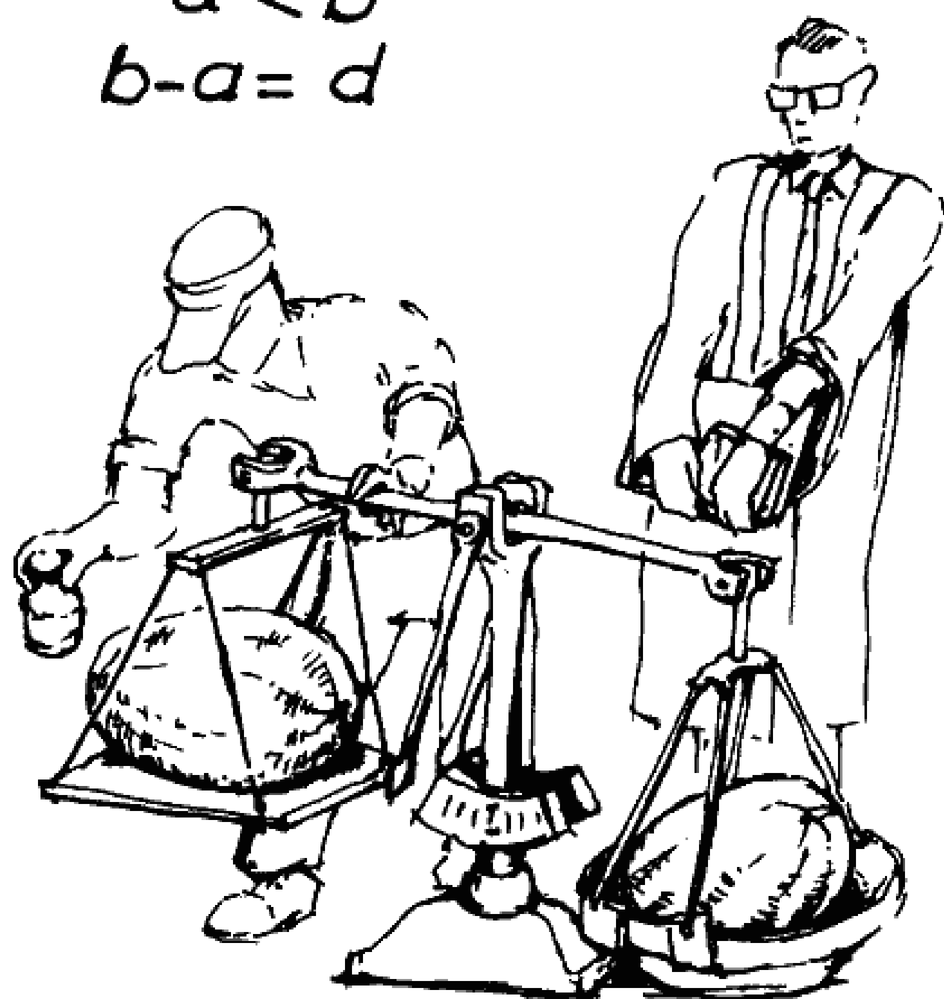
总共有 $2n+3$个答数。）让我们考虑握手次数最多的X先生（也就是说除他本人及他妻子外，他同每个人都握了手）。我们已经知道他妻子X夫人握手0次。

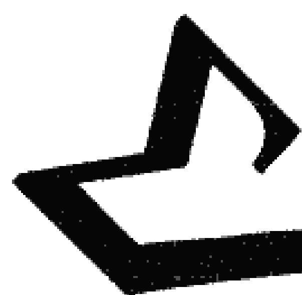
现在假设X夫妇在握手环节前神秘地消失。这样，聚会上的每个人的握手次数正好是X夫妇在场时握手次数减1，因为X先生与他们每个人都握了手而X夫人没有同任何人握手。因为X夫妇消失了，规模缩小了的聚会只有 n 对夫妇。根据假设，我们知道对 n 对夫妇受邀的聚会来说，主人的妻子握手 n 次。倘若这个数比X夫妇未消失时她的握手次数少1，则如果有 $n+1$对夫妇，她将握手 $n+1$次；换句话说，

$$P(n+1)-1=P(n),$$

所以，如果 $P(n)=n$，则 $P(n+1)=n+1$。

于是，证明完成。


a < b
b-a= d



西瓜欺诈案

“慢点吃，拉维，别噎着了。”拉维的妈妈嘱咐道。拉维嘴里塞满了肉饼和豌豆，一心惦着快点迈出门去。

“今晚电脑俱乐部开会，是今年的第一次会。”拉维含着满嘴肉饼向妈妈解释。妈妈耸耸肩，无奈地叹了口气。

拉维的妈妈把头转向正在餐桌边看文件的丈夫。

“明天没啥事吧，亲爱的？”

“没什么事。”丈夫正看着法律备忘录，这时抬起头说。拉维的爸爸是名律师，确切地说，是伊利诺伊州库克郡的地方检察官。“手头正有个案子，这案子一目了然，明天下午早早地就能搞定。”

他看着拉维说：“你一定会对这个案子感兴趣，儿子。它与你心爱的水果有关。”

“有人用西瓜作案吗，爸爸？”拉维笑着问。

“不，当然不是，”他爸爸说，“是一桩欺诈案。一个可怜的瓜农被敲了竹杠，我正打算指控疑犯非法侵占。”

“有意思。瓜农是怎么被骗的呢？”拉维问。

父亲答道：“他叫迪姆斯代尔。迪姆斯代尔先生住在路易斯安那州。他与芝加哥这里的运通公司做生意，委托运通公司把西瓜卖给这里的食品店。为此他要向运通公司预先支付所售

每磅西瓜7美分的佣金。上个月，他向运通公司发运了一批西瓜，沿着密西西比河运到这里。我手上有船上的装货单。他装了两大箱的西瓜，足有10 000磅[1]，有路易斯安那州港务局的确认文件为证。按83美分的批发价，他应该能从运通公司拿到8 300美元。他向运通公司寄出了700美元的支票作为佣金。运通公司在8月12日收到西瓜，然后卖给了这里的食品店。但他们给迪姆斯代尔的钱只有4 140.04美元！运通公司没有保存销给每家食品店的记录或收据，但他们的经理声称把收到的钱全额交给了迪姆斯代尔先生。"

"哦。"拉维咕哝道。

"他们竟厚颜无耻地说，西瓜坐船沿密西西比河逆流而上时，被太阳烤脱水了。幸亏运通公司还有一个西瓜没卖出，迪姆斯代尔先生也存着一个同一批次的西瓜。我让人把迪姆斯代尔先生的西瓜空运到这儿，把两个西瓜都送到犯罪实验室做了分析。"父亲接着说。

拉维还在嚼着他的肉饼。他问："西瓜真的脱水了吗，爸爸？"

"这是实验室报告。没怎么脱水。运通公司的那个西瓜是红虎西瓜[2]，有12磅重，含水98%。迪姆斯代尔的那个西瓜也是红虎西瓜，含水99%。结论显而易见。我可不想让运通公司拿记录不全做借口，否认他们欺骗瓜农的勾当。"

拉维打扫完餐盘，站了起来，向门口走去。"再见，妈妈。再见，爸爸。"他说。当他把手伸向门把手时，他转过头来对父亲说："顺便说一句，爸爸，我要是你，我就会重新考虑这个案子。"

---

① 1磅≈0.4536千克。——编者注

② 一种长圆形的西瓜，表皮暗绿间红，少籽，富含水分。——译者注

为什么拉维对他父亲说这番话呢？

分析

西瓜之所以称为西瓜，就是因为它的重量中水分占了99%[①]。假定 10 000 磅西瓜在太阳下晒了几个小时而脱水，变成含 98% 的水分，它们现在有多重呢？

求解

许多人看到这个问题时，如下求解：西瓜本来含99%的水分，现在含98%的水分，因此重量变为 10 000 × (98/99) = 9 898.99，减少了101磅。

但这并非正确的解法，因为它未考虑到后一个百分比是与变化了的未知重量相关的。正确的分析应该是下面这样的。

如果西瓜原来含水99%，那么它们含1%的固形物（瓜籽、糖、瓜皮等）。对原本10 000磅的西瓜来说，其含有的固形物重 0.01 × 10 000 磅 = 100磅。西瓜脱水后含 98% 的水分，则固形物重量占新的重量（w）的 2%，也就是说，

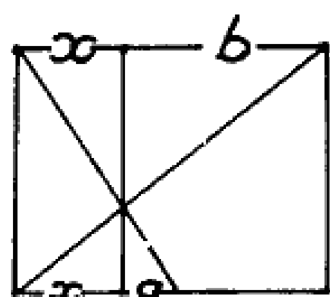
$$0.02w = 100 \text{ 磅，即} w = 5\ 000 \text{ 磅！}$$

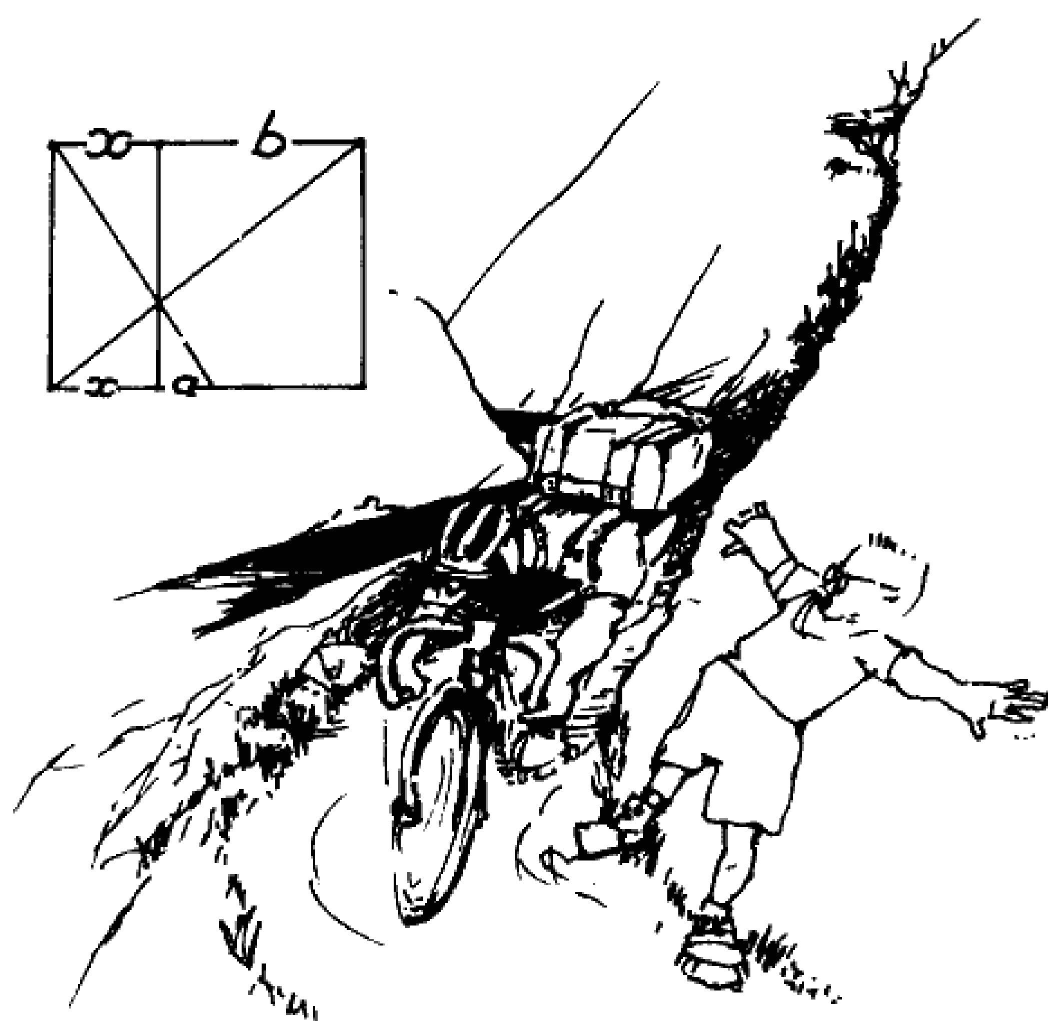
令人惊讶的是，西瓜最后竟失去了一半的重量。

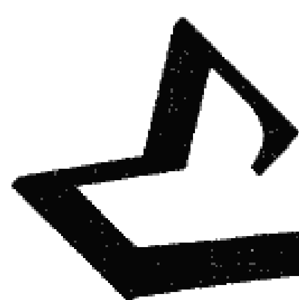
因此，瓜农迪姆斯代尔先生确实只能得到他所期望的 8 300.00美元的50%，即4 150.00美元。从中减去未售出的那个刚好重12磅的西瓜的 9.96美元（12磅 × 83美分/磅），他应该拿到 4 140.04 美元，这正是他收到的钱数！

---

① 西瓜的英文为watermelon，故有此说。——译者注


x
b
x
a





秃鹰被盗案

在漆黑的夜里，在大峡谷最东缘的简易公路上，拉维尽力注视着路边的每一条土路，生怕错过了通向阿申林营地的叉路口。

拉维一家已驱车好几个小时了，他们打算傍晚赶到营地，但没想到路上会花这么长时间。现在已快凌晨 2 点了，拉维的爸爸正在与瞌睡虫搏斗，而且显然，瞌睡虫已经开始占上风了。

“前面该向右转了，爸爸。”拉维大声说。

这辆SUV转向土路，速度慢得像爬一样。即便开着远光灯，其光亮也仅仅能将夜幕撕开一条小缝。居住在城市里的人们很难想象在没有月光的旷野里，夜晚会有多么黑。

汽车载着这家人一直往前，他们终于发现了一个暗淡的光点，那是来自一间小屋门廊上的灯光。

“看那儿，爸爸，”拉维指着灯光说，“我想我们要到了。”

爸爸把车开到小屋前，勉强点了一下头。拉维的妈妈已在后座上熟睡多时。拉维和爸爸走到小屋前敲了敲门。门开了，一个穿着灰制服的男人走了出来，站在幽暗的灯光里。

“要帮忙吗？”他问。

拉维的爸爸上前告诉这位护林员，他们一家人预定了一块露营地。他跟护林员说了一家三口的名字，并说明天打算去徒步旅行。每个人要想进入大峡谷徒步旅行，都要在前一天晚上把名字告诉护林员，以防万一走失了，好进行搜救。在淡季里，护林员只在夜里在营地值班。公园管理处认为为了露营人员的安全，这么做是必要的，尽管他们经费紧张得要命。事实上，在这一年的这个时候，营地几乎是荒废的，只有一批自行车队员在这里，沿着纵贯大峡谷、北至阿申林营地南至布兰布尔林营地的小径徒步和骑车拉练。

拉维第二天早晨醒来时，太阳已照到他的脸上，他知道自己已睡了很长时间。他看了看表，“11点20，我记不得什么时候睡过这么晚了。”他寻思。

他叫醒还在熟睡中的父母。他急着开始全家人的徒步旅行。然而，很显然，他们睡得太久了，今天的徒步穿越只能大打折扣。他们能看看大峡谷，穿过第一截小径就算不错了。拉维的父母坚持吃完早餐再出发——实际上现在应该算午餐了。这意味着还要生炉子，又要耽搁好久。

“好吧，但我们一定要去看看秃鹰。”拉维说。

拉维从他的导游书里得知，进入小径几百码[①]，应该有一个秃鹰的窝。而且现在是个特别激动人心的季节，因为秃鹰这个时候产完蛋要孵小秃鹰了。能看到这种稀罕的鸟，特别是鸟窝里还有鸟蛋，这真是太难得了。

现在是下午2点一刻，拉维一家总算踏上了从阿申林营地至布兰布尔林营地的小径。拉维照着地图寻找着秃鹰的筑巢地，

① 1码≈0.9144米。——编者注

它应该在小径附近一块陡峭岩面的凹处。走到小径的一个拐弯处，拉维突然跳了回来。“小心！”他喊道。一个男人骑着山地车一溜烟就过去了，差点儿撞到了他。拉维很奇怪这个人背上背着诺大一个包居然能骑得这么快。

“劳驾。”拉维的爸爸冲着男人后面喊了一声，但那人没有理会。

“我本来想问问他去鸟窝该怎么走。”他失望地说。

一家人继续赶路。沿着小径往前走了几百英尺[①]后，拉维看到了那块岩面，鸟窝在30英尺高的壁凹处清晰可见。但秃鹰并不在鸟窝里。

“真扫兴，”拉维的妈妈说，“鹰飞走了。”

“不对，妈妈，这不可能，”拉维说，“鹰不可能在这个关键时刻撇下它的蛋的。”

拉维开始向岩面攀爬，小心翼翼地蹬着凹凸的岩石。

“下来，拉维。”拉维的妈妈恳求道。

但拉维还是在几分钟后爬到鸟窝边，朝里看去。

“鹰被偷了！”拉维大叫道。他小心翼翼地从岩面上爬下来。“蛋也没了！”

当晚，值班的护林员上岗时，拉维和父母把鹰和蛋被盗的事告诉了他。护林员大吃一惊，立即打电话给国家公园管理处。第二天一早，两位联邦特工就赶到了营地，他们是从华盛顿特区连夜飞过来的。特工召集了拉维一家人、拉维一家到达营地时的当班护林员斯廷森，以及约翰·埃弗斯和沃德·汤普森，这两个人是秃鹰被盗当天阿申林营区和布兰布尔林营区护林员

① 1英尺≈0.305米。——编者注

小屋里的记事本上登记的另外两个人。

特工仔细询问了拉维是怎么和什么时候发现空了的鸟窝的。他们推测秃鹰一定是在太阳升起之后的某个时候被偷的，因为没有人有本事在黑夜里爬到岩面上去。

“你当时在小径上做什么呢，埃弗斯先生？”一位特工问。

“我在为就要参加的比赛训练。我们都是。”他说，他指的是在两处营地的自行车运动员。“我们沿小径骑车上下峡谷。我在日出时从布兰布尔林营地出发，然后沿着小径骑到阿申林。”

“你什么时候到达阿申林？”特工问。

“我是下午2点半到的。”埃弗斯回答。

“他说的是对的，”拉维说，“他在约2点25从我们身旁骑过去，还差点撞到了我。”

“我招呼你停下，可你好像非常匆忙。”拉维的爸爸对埃弗斯说，他回忆起埃弗斯背上背着的大包。

“我们的训练要求以固定的速度骑车或劲走上下峡谷，所以不能停下来跟你说话。”埃弗斯指着他的速度计说。

“我们调查得知你是个鸟迷，埃弗斯先生。”另一位特工说。

“听着，我告诉过你们，我是在这儿训练！”埃弗斯激动地说。“在布兰布尔林的所有自行车运动员都看到我天亮时出发。我们的教练通过GPS跟踪我的骑车速度，确保我匀速骑行。在阿申林的运动员都能证明我在两点半到达那里。沃德·汤普森在小径上也看到了我，我们是在早晨11点相遇的。”埃弗斯接着说。

“是真的吗，汤普森先生？很明显，你是从阿申林到布兰布尔林的方向步行。”一位特工问。

“不是步行，是劲走！”沃德·汤普森说，他显然被激怒了。“我们交替训练骑车和劲走，好增强我们的腿劲。我是日出时从阿申林出发劲走的，上午11点在小径上碰上埃弗斯。这一天非常棒，我晚上9点半到达布兰布尔林。”

“你走了一整天？”拉维的妈妈关切地问。

“当然，我们得以固定的速度上下峡谷，以锻炼我们的耐力。”汤普森回答，他对自己的成绩很骄傲。

一位特工把护林员斯廷森拉到一边，过来坐在拉维旁边。他探着身子小声说：“你看到什么了吗，斯廷森护林员？那晚是你值班。”

“没有，对不起。我啥也没看见，”护林员斯廷森也小声地回答，“实际上，我下班稍早了点。在日出前，大约5点20，天还没亮我就开车走了。”

“好了，那只秃鹰和它下的蛋值很多钱，我们推测是你们两人中的一个偷走了。”另一位联邦特工说，他看了看埃弗斯，又看了看汤普森，“现在，谁打算坦白？”

拉维听着埃弗斯和汤普森的质问，拿着根树枝在地上乱画着。他头也不抬地说：“他们都没干。真正的小偷是……”

拉维怀疑谁，又是为什么呢？

分析

通常，罪犯在他们编造的故事中会露出破绽。拉维考虑了

下述情况。

本案最有力的事实如下。

1. 秃鹰不可能在日出前被盗。秃鹰的窝离阿申林营地只有几分钟的路。

2. 沃德·汤普森日出时离开阿申林营地(命此点为A)，并以匀速向布兰布尔林营地（命此点为B）劲走。他于晚上 9 点半到达目的地。

3. 约翰·埃弗斯在日出时离开布兰布尔林，并以匀速向阿申林营地骑行。他于下午 2 点半到达目的地。

4. 汤普森和埃弗斯在上午 11 点交会。

因此，拉维要解的问题是：

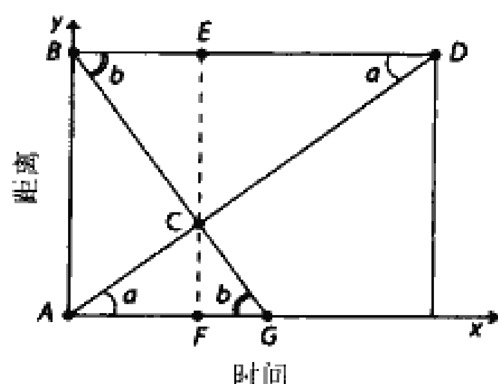
> 一人在日出时从 A 点出发并以匀速（速度未知）向 B 点前进。他于晚上 9 点半到达 B 点。另一人在日出时从 B 点出发并以匀速（速度亦未知）向 A 点前进。他在下午 2 点半到达 A 点。两人在上午 11 点交会。日出是在什么时候？

如果你能解出这道题，你就能像拉维一样破解此谜了。

求解

破解谜题包含两个部分：先找到需要解决的问题，然后动手解决这一问题。本案中，这两步都不容易。好像仍然缺乏足够的信息。

但拉维抓住了事实的本质。他发现问题通过代数解有点乱，但用几何可以解出。当他用树枝在沙地上乱画时，他实际上是在画有关埃弗斯和汤普森的时间-距离图，如下图所示。



时间

x 轴表示时间，原点代表日出时刻。y 轴表示从阿申林营地到布兰布尔林营地的行进距离。因此，点 A 代表日出时的阿申林营地（原点），点 B 代表日出时的布兰布尔林营地。汤普森从A开始沿线段 AD 行进。（点 D 的纵坐标是 B，横坐标是晚上 9 点半。）同时，埃弗斯从 B 开始沿线段 BG 行进。（点 G 代表下午 2 点半的布兰布尔林。）两人在时间点 C 相遇，其时间（横）坐标是上午 11 点，它与点 E 和点 F 的横坐标相同。FG 长为 3.5，为下午 2 点半（埃弗斯到达点 A 的时间）和上午 11 点（两人交会的时间）之差。同理，ED 长为 10.5。为求解日出时间，我们需要确定 AF（或 BE）的长。

从图中可以看出，角 DAG 等于角 BDA，因为它们是内错角；我们令此角为 a。同样，角 DBG 等于角 BGA，因为它们也是内错角；令此角为 b。于是，

$$\tan a = CE/ED = CF/AF \tag{1}$$

$$\tan b = CE/BE = CF/FG \tag{2}$$

变换式（1）得

$$CE/CF = ED/AF;$$

同样，变换式（2）得

$$CE/CF = BE/FG;$$

从而可知

$$BE/FG = CE/CF = ED/AF,$$

或简单地表示为

$$BE/FG = ED/AF。$$

现在，从图（和时间坐标）中可以看出，$BE = AF$；因此，通过交叉相乘，我们可以得到

$$(BE)(AF) = (FG)(ED),$$

$$(AF)^2 = (FG)(ED)。$$

已知FG和ED的值，于是，

$$(AF)^2 = 3.5\text{小时} \times 10.5\text{小时},$$

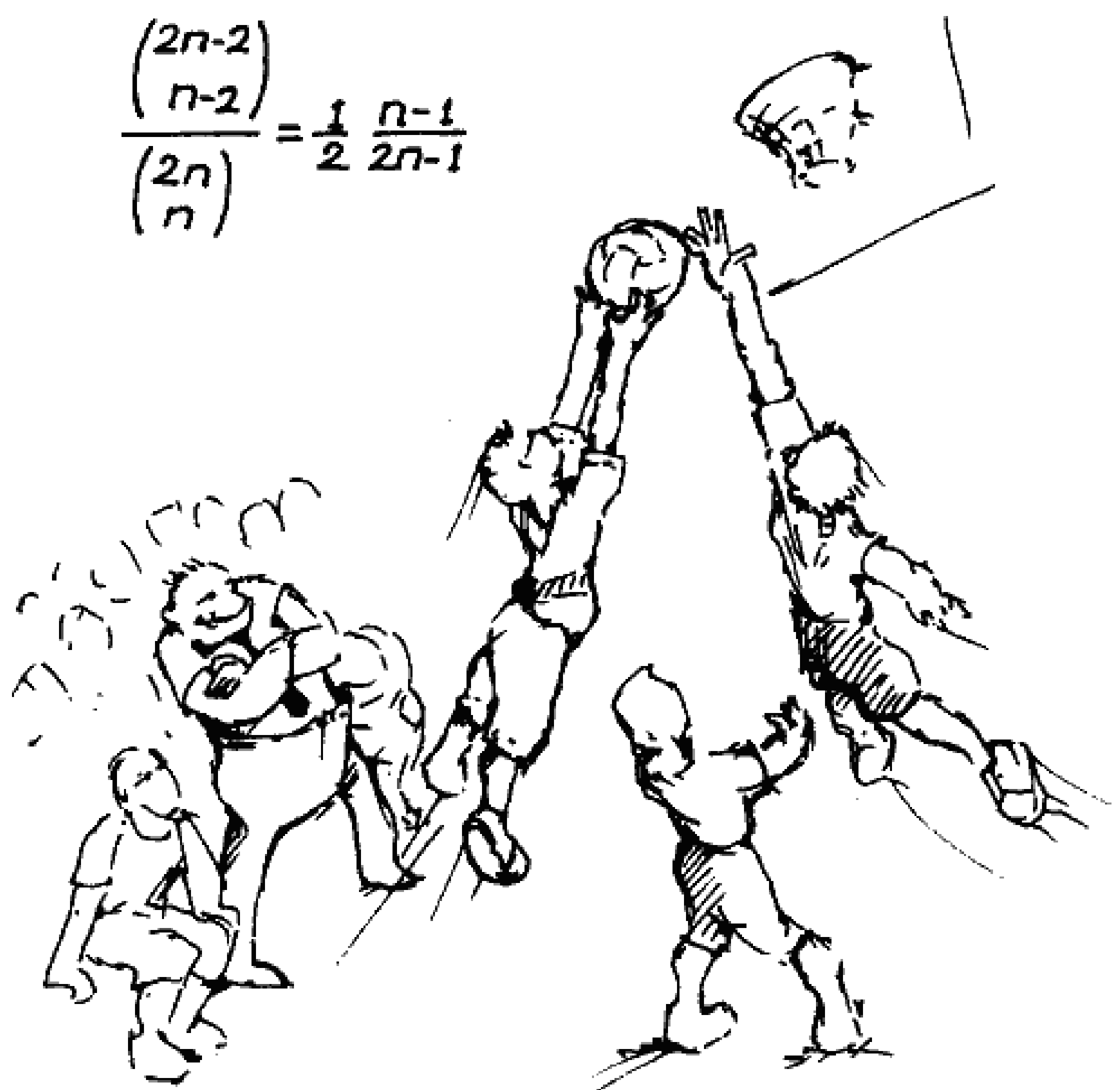
$$AF = 6.06\text{小时}。$$

此值等于约 6 小时 4 分钟。因此，日出时间应在上午 11 点之前 6 个小时零 4 分，也就是在 4 点 56 分。

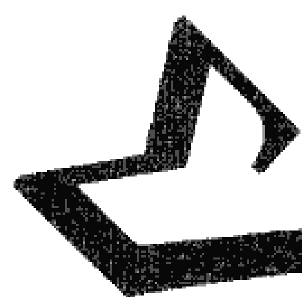
显然，护林员斯廷森说他在早晨5点20就要日出时离开营地，是在撒谎。这个时候已经是日出之后24分钟，这24分钟他有足够的时间趁着天刚亮到达鸟巢边，爬上岩面，偷走秃鹰和它的蛋。

至于他为什么撒谎我们不得而知。也许他太过紧张，未能做到自圆其说。或者他本指望来自华盛顿特区的特工和熬夜的拉维一家不会在意日出的准确时间。而且，因为他的话埃弗斯和汤普森听不到，他以为他的谎言不会被注意，他也能摆脱嫌疑。

要不是拉维在地上乱画，他的俊俩差点儿得逞了。



$\frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2}\,\frac{n-1}{2n-1}$



篮球联赛舞弊案

拉维已是大汗淋漓。他顾不得看台上的喧嚣，忘我地把球运到罚球区顶。拉维是他所在校队威尔蒙特小牛队的控球后卫。这已经是本季最后一场球赛最后一节的尾声了，而小牛队仍以49比50落后于格林维尔火箭队。小牛队的中锋帕特·特克尔跑到了罚球区顶。拉维看了一眼计时牌，全场比赛只剩20秒！他把球高吊给帕特，佯装向左，却突然向右从帕特身边绕过冲进罚球区内，并高高地伸出右手。防守他的球员就这么被他晃到了身后，同时帕特的回传球也到了。多么经典的传切配合！拉维运了一下球，随即带球跨出两步跃起上篮。可是火箭队的明星前锋特德·琼斯不知从哪儿冒了出来，吼叫着跳起一个大帽！引得看台上一片唏嘘。火箭队控制了球，在终场前2秒又得了2分。最终结果：火箭队52分，小牛队49分。

火箭队无疑将拿到分区冠军，他们取得了最好的联赛成绩，而小牛队只能位居其后。尽管无望夺得分区头衔，拉维还是希望在赛季的最后一场比赛能打败火箭队。当然，本赛区的每个人都知道，只要火箭队的琼斯和明星中锋萨多斯基一起上场，火箭队是无人能敌的。拉维参加的是一种独特的联赛，一轮对抗赛中两所学校实际上要交战4次：每个校队有10名队员，比

赛前，教练要公开地把队员随机地分成A和B两组，各组5名队员。这两个小组分别与对方学校同样方法产生的两个小组对抗，共要打4场比赛。如果一方赢得3场或4场，该校即获得此轮胜利，如果双方战成2比2，算平局。

这一年，火箭队中尽是优秀球员，而且队中两名球员特德·琼斯和迈克尔·萨多斯基特别突出。只要他俩在一个小组，他们就所向披靡。整个赛季他俩搭档一场未失！这一年火箭队太幸运了，他俩搭档的次数好像比分开的次数要多许多。每当其他队的家长们向火箭队教练约翰·德尔斯基抱怨，他总是耸耸肩说，“他们在一起的机会与不在一起的机会差不多。不管怎么说，运气比实力更重要，今年我们不仅打得好，运气也好！”

观众很快就散去了，体育馆一下空旷起来。火箭队出去聚餐了。拉维决定留在校园里参加晚上7点的颁奖典礼。离颁奖只有两个小时了，拉维没想到骑车回家。他打算做做12级数学竞赛测试题，短暂的宁静很适合做这样的练习。他打裁判席跟前走过，分区冠军的奖杯在桌上放着，已刻上了格林维尔火箭队的名字，今晚就要发出去了。他停下来看了看本赛季的比赛统计表，火箭队确实取得了引人注目的成绩。他们在分区小组循环赛中取得了20轮17胜的成绩。拉维仔细看了看队员名册，偶然发现在20轮比赛中，琼斯和萨多斯基有14轮一起出场。他出了体育馆，向图书馆走去。“正是解题的时候。”他想，一边回忆着这一愉快的赛季。

晚上7点，拉维回到了体育馆。看台上坐满了来自格林维尔和威尔蒙特的学生和他们的家长。火箭队队员穿着队服，他

们的教练德尔斯基已换上了西装。西南分区总教练阿尔文·威尔逊先生走向事先立在体育馆中央的颁奖台，开始发话："请注意！家长们，同学们，晚上好！又一个赛季结束了，是时候给我们的分区冠军加冕了。请德尔斯基教练上台来，请格林维尔火箭队队员站起来让大家认识一下。"火箭队队员站起来，赢得了家长和同学们的热烈掌声。德尔斯基教练走向颁奖台，举手向观众致谢，打算发表获奖感言，总教练威尔逊则走向裁判席取奖杯准备正式颁奖。拉维赶紧迈向裁判席。

"打扰一下，威尔逊教练。"拉维说。

"有什么事吗，年轻人？" 威尔逊教练答道。

"有的。今晚请不要颁奖了，我认为这里面有猫腻。"

当然，威尔逊教练是不会理会拉维的，颁奖仪式按时举行。但在颁奖仪式结束后，拉维向威尔逊教练呈上了他赛后在图书馆进行的演算。他的计算促成了对火箭队的官方调查，火箭队的助理教练不得不承认，他与德尔斯基教练合谋操控出场名单，使琼斯和萨多斯基得到了更多的同时上场的机会。火箭队的奖杯被追回，而处在第二名的小牛队成为了新的冠军。尽管未举行新的典礼或仪式，但拉维被球队拥为"最有价值球员"，不是因为他的球技，而是因为他杰出的数学才能。拉维为何怀疑这里面有猫腻呢？

分析

本案的问题可分成两个部分。

问题一　如果火箭队的10名球员被分成各5名球员的A和B两个组，特定的两个人（例如琼斯和萨多斯基）分在同一组

的概率是多少?

问题二　如果问题一求出，这种情况在20轮比赛中出现14次的概率是多少?

求解

问题一

为使问题便于讨论，将10位运动员编号1至10，给琼斯和萨多斯基分别编为9号和10号。现在，如果我们把这10位运动员随机地划分到各5人的A和B两个小组中，那么9号和10号在同一小组中的概率是多少呢?

首先，寻找出把球员分成A和B两个小组的总分法，简单地看，它也是从10名球员中挑出5名组成A组的分法，因为剩下的5名自然就构成B组了。

我们来举个更简单的例子。假定一家冰淇淋店卖一种配三勺冰淇淋的香蕉船，有8种口味的冰淇淋供挑选。如果每一勺冰淇淋口味都不同，你可以搭配出多少种香蕉船呢?

让我们一次挑选一种口味。第一次有8种口味可选，接着就只有7种口味可选，第三次则只剩6种口味了。因此，共有多达

$$8\times7\times6=336$$

种方法按顺序搭配三种口味！对营业员来说，不管你点的是香草－巧克力－草莓船，还是草莓－香草－巧克力船，都是一回事。(他们要用勺盛同样的冰淇淋。)因此上面的数字中包含重复的配方，我们要消除这种重复。就说刚才的3种口味吧，我们用V表示香草，用C表示巧克力，用S代表草莓，按不同顺序排列它们:

C S V
C V S
S C V
S V C
V C S
V S C

这样共有6种排列；也可以采用与前面相同的分析方法，得出$3\times2\times1=6$。也就是说，有6种叫法叫的是同一道香蕉船。于是，在按顺序叫冰淇淋的336种方法中，每一种组合的香蕉船都被重复了6次。因此，可以搭配的香蕉船种数共有

$$\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\frac{336}{6}=56。$$

上面的分析过程可以用阶乘表示。你可能已经学过，阶乘$n!=1\times2\times\cdots\times(n-1)\times n$。在组合学（数学中涉及计数与组合的领域）中，从 n 个对象中选择 k 个对象的方法数记作 $C(n, k)$，读作“n选k”，也常常写成如下形式：

$$\binom{n}{k}，也即\ \frac{n!}{(n-k)!k!}。$$

因此，如果一家冰淇淋店供应8种口味的冰淇淋，在一份香蕉船中搭配3种口味的方案有$C(8,3)$种，也即$\binom{8}{3}$种，计算结果为

$$\frac{8!}{(8-3)!3!}=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{(\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1})(3\cdot2\cdot1)}=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56。$$

可以看出，这与前面一步一步分析得出的结果是一样的。

让我们借助刚才的公式，返回到篮球比赛问题中。划分 A

和B两个小组的方法数为

$$\binom{10}{5}=\frac{10!}{(10-5)!5!}=\frac{10!}{5!5!}=252\text{。}$$

这里区分了小组的顺序，因此如果球员1–5在A组、球员6–10在B组，则其与球员6–10在A组、球员1–5在B组是不同的。

现在，为了计算出球员9和10分到同一组的概率，我们先计算他们同在A组的概率。

如果把9号和10号球员分到A组，则还剩8个球员可填补A组剩下的3个空缺。因此，当9号和10号球员在A组时，存在

$$\binom{8}{3}=56$$

种方法组成A组。同理，当9号和10号球员在B组时，也存在56种方法组成B组。所以，9号和10号同在A组或B组的概率为

$$\frac{56+56}{252}=\frac{4}{9}\text{。}$$

注意这与德尔斯基教练声称的（可能我们的直觉也认为的）他的两个最佳球员在一起和分开的可能性相等稍有不同。实际上，他们分在一起的概率是4/9（我们将它命名为概率p），而他们不在一起的概率稍高些，为5/9（令其为q，$q=1-p$）。

问题二

我们既已算出 $p=4/9$，就要问：如果在 20 轮比赛中都要把 10 个人分成 A 和 B 两个小组，9号和 10号同时出现在一个小组中14次的概率是多少？

这一问题可以使用二项分布求解。假定一个事件只有两种可能的结果，就像抛掷一枚硬币，要么出现H面，要么出现T面。

如果H出现的概率是p，则T出现的概率必然是$1-p$。现在假定重复此事件5次。一种可能的结果是H H H T T，这种结果出现的概率是

$$p\cdot p\cdot p\cdot(1-p)\cdot(1-p)=p^3(1-p)^2。$$

再看看5次试验的另一种可能的结果：H T T H H。这种结果出现的概率是

$$p\cdot(1-p)\cdot(1-p)\cdot p\cdot p=p^3(1-p)^2。$$

事实上，任意以某种次序出现的含3次H和2次T的结果都具有相同的概率。现在，如果要问，不考虑次序，出现3次H和2次T的概率，则要在概率 $p^3(1-p)^2$之上乘以排列3个H和2个T的方法数。这个数正好是从5次事件中3次获得H的方法数（剩下的两次默认为T），因此，它等于$C(5, 3)$。于是，出现3次H和2次T的概率为

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2。$$

现在，假定一个事件只有两种可能的结果H和T，它们出现的概率分别为p和$1-p$。如果重复事件n次，则k次出现H的概率$P(k)$为

$$P(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}。$$

对我们的问题而言，我们感兴趣的是琼斯和萨多斯基分在同一组的情况。（这与上述的H类似，而两人不在同一组则对应T。）出现这种情况的概率是4/9。因此，他们在20轮比赛中14次分在同一组的概率为

$$P(14)=\binom{20}{14}\left(\frac{4}{9}\right)^{14}\left(\frac{5}{9}\right)^{20-14}。$$

为计算实际值，将其改写为

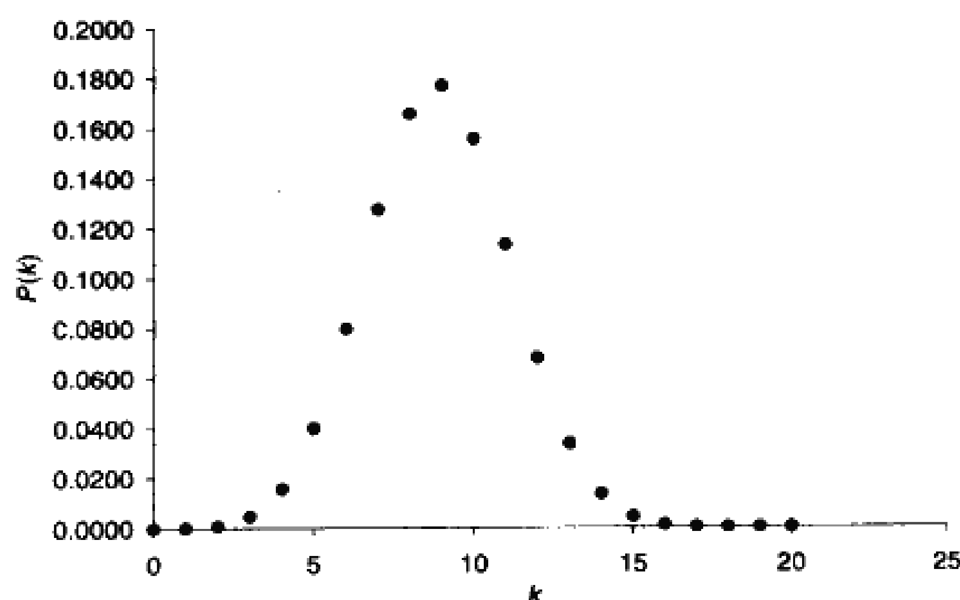
$$P(14)=\left(\frac{20!}{14!6!}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{14}\left(\frac{5}{9}\right)^{6}。$$

这可以借助计算器或PC机算出来，值为0.0134，即1.3%。

更一般地，他们在20轮比赛中k次分在同一组的概率为

$$P(k)=\binom{20}{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}\left(\frac{5}{9}\right)^{20-k}。$$

这些值绘于下图中。



注意到，他们在同一组的次数非常少或非常多都不太可能。最大的概率是他们在20轮比赛中9次分在同一组，值为0.1768，即接近于18%。8次或10次分在同一组的概率稍小些，而在这几个大值两边，概率依次下降。如果将可能的k值（即0 – 20）下的概率加在一起，结果应为1（即100%），也就是说，

$$\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}\left(\frac{5}{9}\right)^{20-k}=1。$$

现在，为了弄清琼斯和萨多斯基在20轮中14次被分在一起是不是简单的运气问题，只考察$P(14)$是不公平的。我们实际上要问的是他们搭档至少14次的可能性有多大。因此，应该把他们分在一起14，15，…，20次的概率加在一起：

$$\sum_{k=14}^{20}\binom{20}{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}\left(\frac{5}{9}\right)^{20-k}=0.0189512\text{。}$$

结论是，琼斯和萨多斯基在20轮中多达14次分在一起的概率小于2%。

以此为基础，拉维推测在队员分组中有人做了手脚，才会使琼斯和萨多斯基最终分在同一个小组。而且他的这一结论以超过98%的概率是真的，而就此展开调查也就顺理成章了。

拓展

至少还有两个有趣的问题值得进一步讨论。

1. 假定10名球员中有3位超级球星。如果把这10人随机地分成5人一组，这3人分在同一组的概率是多少？

如前所述，有252种即$C(10,5)$种方法把10人分成两组，这里考虑了小组的顺序。现在，我们把3位顶尖球员分到A组，则A组还剩两个空缺，可以供7人填补。这就有“7选2”，也即$C(7,2)=\binom{7}{2}=21$种方法构成3位球星同在的A组。同理，也有21种方法构成3位球星同在的B组。因此，3位球星同在某一组的概率为$(21+21)/252=1/6$，即约16.7%。

2. 假定火箭队有15名球员，要把他们随机地分成3个5人小组。那么，琼斯和萨多斯基分在同一组的概率是多少？

首先，让我们弄清楚有多少种方法把15名球员分成3个5

人小组。有 $C(15, 5)$种方法构成A组；对已经组成的每个A组来说，又可从剩下的10人中挑出5人组成B组，也就是说，对每个A组都有 $C(10, 5)$种方法组成B组；剩下的5人自然也就组成C组了。因此，总的分法为

$$C(15,5)\times C(10,5)=\binom{15}{5}\times\binom{10}{5}$$

如果用阶乘表示，在考虑顺序的情况下，我们有

$$\frac{15!}{0!5!}\times\frac{10!}{5!5!}=\frac{15!}{(5!)^3}$$

种方法把15名球员分成3个小组。

如果不考虑小组的顺序，只关注哪些人分在了一个小组，哪些人分在了另外的小组，则上面的数值要除以将A、B和C三个小组排序的方法数，也就是3!，这样就得到 $\frac{15!}{3!(5!)^3}$ 。计算出来是126 126种不同的方法。

用同样的方法，我们可以推广到将 nk 个对象分成 k 个 n 对象小组的方法数为

$$\frac{(nk)!}{k!(n!)^k}\text{。}$$

为了计算琼斯和萨多斯基同分在A组的分法，我们首先把他们分在A组，接着用剩下的13人填补A组的3个空缺，有 $\binom{13}{3}$ 种方法。A组分好后还剩10人，因此有 $\binom{10}{5}$ 种方法构成B组，剩下的人自然就构成C组了。所以，共有

$$\binom{13}{3}\binom{10}{5}=\frac{13!}{3!10!}\times\frac{10!}{5!5!}=\frac{13!}{3!(5!)^2}$$

种方法分成3个小组，而其中琼斯和萨多斯基同在A组。同理，有同样多的方法让这二人同在B组或C组。也就是说，有 $\frac{3(13!)}{3!(5!)^2}$ 种方法将二人同分在任一个小组。因此，他们分在同一个小组的概率为

$$\frac{3(13!)}{3!(5!)^2} \div \frac{15!}{(5!)^3} = \frac{3(13!)}{3!(5!)^2} \times \frac{(5!)^3}{15!} = \frac{3(13!)(5!)}{3!15!},$$

它等于2/7，约为0.285 7，即约29%。

最后，注意到，如果首先把琼斯和萨多斯基分在B组，结论是一样的：从剩下的13人中选5人组成A组，有 $\binom{13}{5}$ 种方法；余下8人中选出3人填补B组的空缺，有 $\binom{8}{3}$ 种方法；剩下的5人自然就构成C组。因此，如果将琼斯和萨多斯基分在B组，则有

$$\binom{13}{5}\binom{8}{3} = \frac{13!}{5!8!} \times \frac{8!}{3!5!} = \frac{13!}{3!(5!)^2}$$

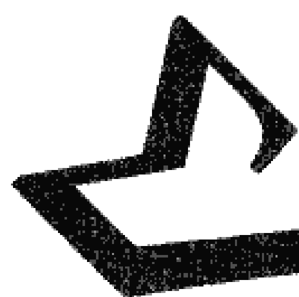
种方法，结果与前面是相符的。

如果将琼斯和萨多斯基分在C组，则同理有 $\binom{13}{5}$ 种方法组成A组。A组的5人确定后，剩下 $\binom{8}{5}$ 种方法组成B组。B组人员一确定，余下的3人自然就归C组了。因此，实际上有

$$\binom{13}{5}\binom{8}{5} = \frac{13!}{5!8!} \times \frac{8!}{3!5!} = \frac{13!}{3!(5!)^2}$$

种方法分成3个小组，其中琼斯和萨多斯基同在C组。





月球岩石掉包案

拉维眼看着篮球飞过篮板，“投得不错，爸爸。或许再小一点劲就投进了。”

拉维的爸爸不太会打篮球。他将球放在胸前用两手笨拙地投出，用的是从未打过篮球的大人们常见的姿势。关键是他天生就缺乏运动的协调性。除此以外，他是个忙碌的地方检察官，他只能有意识地抽出周末陪儿子玩，比如投投篮之类。拉维只要能同爸爸一起聊聊天或下下棋就很满意了，但他也希望哄爸爸开心。

爸爸边运球边说：“警察拘留了一个人，这个人显然认识你。我昨天跟他简单地聊了几句。我们打算指控他企图盗窃。”

“他认识我？”拉维充满疑惑。

“是的，”拉维的爸爸回答，“他不是你常见的罪犯，他犯的也不是你常见的罪行。很明显，他企图从芝加哥科学博物馆偷走一块月球岩石。他是那儿的守夜人，名字叫……”

“不会是乔治·戴维斯吧！”拉维大声说。

“看来你确实认识他。”爸爸说。

“是的，爸爸，我跟他很熟。我不相信戴维斯先生会偷博物馆里的月球岩石。”

“但警察从他的一个同伙那里得到了线索，这个同伙在他们作案前一晚退缩了。似乎月球岩石的报警系统相当简单，只是在安放它的底座上装了个重量传感器。传感器本身是很灵敏的，误差为1毫克，但人们只需要事先知道岩石的重量并在拿走它时放上同样重量的物体就行了。”

“那么这与戴维斯先生何干？”拉维问。

“他的同伙告诉我们，他们打算晚上偷走月球岩石，它在黑市上值差不多100万美元。他说在戴维斯的包里可以找到金属砝码，戴维斯打算用这些砝码防止传感器报警，”拉维的爸爸说，“于是警察前往博物馆并在戴维斯的包里找到了一串砝码片，正好与举报人说的相符。他们逮捕了他并把他带到了警局。”

“我就是不相信。”拉维大叫道。

“为什么？”他父亲问，“不过，你是怎么认识戴维斯先生的呢？”

“你先回答我，爸爸，你知道多少戴维斯先生的事？”

“我知道他在博物馆已当了34年的守夜人。我知道他是个一辈子拿着微薄的薪水的老人，碰到了一个很容易暴富的机会。”拉维的父亲说，听他口气，好像过去处理类似的轻罪犯人够多了。

“可是爸爸，这一点也不像我所认识的戴维斯先生。你知道，我常到科学博物馆去，根据我最近几年在博物馆的经历，我想我非常了解戴维斯先生了。老实说，他是我尊敬和信赖的人。”拉维说。

“尊敬？”拉维的爸爸惊讶地问道，因为拉维难得这么评

价别人。

"是的，爸爸。戴维斯先生20世纪60年代末在伯克利念天文学研究生。他爱上了一个读数学博士的女孩。他们就要结婚时，女孩得了白血病。他执意娶了她，几个月后她就死了。他告诉我他们多么喜欢一块儿在校园里散步，或在夜里去海边看星星，聊天文学、数学和哲学。戴维斯先生笃信宇宙是完全有目的的，宇宙中不存在错误和巧合；认为宇宙就像他妻子钟爱的数学方程一样有着完美的平衡。妻子死后他意识到自己没了完成博士学业的心思，他认为自己真正想做的就是学习和阅读。于是他离开了伯克利，来到芝加哥，做了科学博物馆的守夜人，为的是仍然亲近科学，沉浸到阅读中。"

"我没想到戴维斯先生还有这么多事，拉维。但这改变不了对他不利的证据。他没有极力否认对他的指控。当把我作为地方检察官介绍给他时，他显然知道我的名字，也许是看到我们同姓，便问我是否认识一个名叫拉维的少年。我告诉他拉维是我的儿子，他说他认为你是个非常好的少年，并让我向你问好。"

"爸爸，我们得去趟警察局，了解事情的真相。"拉维坚决地说。

现在，他父亲已经学会了相信拉维的直觉和智慧。如果拉维非常怀疑这个人的罪行，这个案子就有必要重新审视。

拉维和父亲来到了芝加哥市警察局。他们走进侦探迈尔斯的办公室，拉维的父亲向侦探打过招呼后说："迈尔斯侦探，这是我儿子拉维。请准许我们三人一起和戴维斯先生再谈谈。"

迈尔斯侦探扬眉怀疑地瞥了一下拉维。他显然不愿意让一

个十来岁的孩子浪费他的时间。但他得表现出对拉维父亲应有的尊重。

“好吧，我们走。”他简短地说。

父子二人跟着侦探来到戴维斯先生所在的拘留室，他要在这里一直待到周一被起诉。

“啊，你好啊小伙子。”看到三人进入拘留室，戴维斯先生便向拉维打招呼。

“你好，戴维斯先生。这到底是怎么回事？”拉维关切地问。

“很简单，34年后，芝加哥科学博物馆终于决定让我当一名盗窃犯。”戴维斯先生郁闷地说。

“我知道你不是盗窃犯，”拉维说，“请告诉我究竟是怎么回事？”

戴维斯先生抬头看了看，深吸一口气，“实际上，事情简单得很。我认为我被诬陷了。博物馆馆长利维先生一年以来一直想让我退休，好让他女婿顶替我的位置。”

“他们在你包里找到的那些砝码是怎么回事，戴维斯先生？”拉维问。

“我哪知道什么砝码的事，”戴维斯先生回答，“我头一次看到它们是在警察现身搜我的包时。当然，我猜你们会认为这些砝码是用来阻止月球岩石报警器报警用的。这是很困难的，因为报警器的容差只有1毫克，除非取下月球岩石时放上精确的重物，否则报警器肯定会发出声音。”

“有趣，戴维斯先生。您在戴维斯先生包里找到的砝码片重多少，迈尔斯侦探？”拉维转向侦探问。

侦探撅起嘴，这回他好像真有些不耐烦了。他从口袋里掏出个小本本。

“238克。我们用证物室称毒品的天平称过了。”侦探回答。

“那月球岩石有多重呢？”拉维继续问。

侦探翻了翻他的笔记本，抬起头说：“不清楚。我们没把它拿下来称。”

“它刚好重95克。它是一名宇航员从静海里的一座小环形山上取回的。其重量中橄榄石占了38%，辉石占了27%，斜长石占了19%，钛铁矿占了16%。”戴维斯先生说，他的话让在场的每个人惊呆了。

“迈尔斯侦探，我爸爸说过在戴维斯先生包里发现的砝码是一些砝码片。它们都一样大吗？每片重多少？”拉维问。

“还是那句话，我没把这些记下来，”侦探的恼火写在了脸上，“但这又有什么关系呢？他有那么多的砝码，足以凑出95克来。”

“迈尔斯侦探，作为本案的地方检察官，我想检查一下那些砝码片。能否请你把它们和你们的天平弄来让我儿子检验一下。”拉维的父亲严厉地说，他被侦探对拉维的无礼惹恼了。

侦探顺从地从证物室取来装着砝码片的塑料包和称毒品的精密天平。拉维把砝码片摊开在桌上，发现只有两种规格，有12片小些的，10片稍大些的。拉维拣起一片小些的放在天平上。

“9克。”拉维宣布。

他又称了大些的砝码片。“13克。”他又说。

“嗯。”拉维说，像往常一样闭上眼沉思起来。

凝神一会儿后，他睁开眼看看戴维斯先生，戴维斯先生正对着他微笑。

“真悬啊，戴维斯先生。”拉维对老朋友说。

“简直是太悬了，年轻人。这就是巧合，你觉得呢，拉维？”戴维斯先生说，脸上仍挂着微笑。

“现在，戴维斯先生，你知道宇宙中不存在巧合了。”拉维咧着嘴笑了，向戴维斯先生直眨眼。

拉维转向父亲和迈尔斯侦探说：“很明显，戴维斯先生是无辜的。”

戴维斯先生知道月球岩石的重量，拉维的父亲和迈尔斯侦探都可以理解。但拉维却算出了9克和13克的砝码片是组合不出95克来的。换句话说，不存在非负整数x和y，使得$9x + 3y = 95$。结果，戴维斯先生被无罪释放。

这是这个故事中好理解的部分。但更有趣的部分与拉维和戴维斯先生最后的对话有关。你认为他们说的是什么意思呢？

分析

这个故事把我们直接带到一个非常有趣的问题中。如果有两个正整数a和b，它们的线性组合，即$c = ax + by$（其中x和y为非负整数），有什么特点呢？

为了更形象，这个问题可以重新表述为：通过组合重a克和b克的砝码片，能得到多少个重量？或者，使用a分和b分的邮票可以凑出多少种邮资？等等。

在我们的例子中，$a = 9$，$b = 13$，而且我们发现数95不能

通过它们的线性组合得出。拉维和戴维斯先生的对话似乎暗示着数95有什么特别之处，但到底特别在哪儿呢？

求解

我们从哪儿入手开始研究这个问题呢？通常，如果没有明显的突破线索，最好通过一些合适的例子做试验熟悉问题。为简单起见，我们假定a总是小于b。

选定$a = 4$和$b = 5$，我们来看看它们的线性组合能得出哪些数（我们称这些数为好数），不能得出哪些数（我们称这些数为坏数），并把它们列在表格中。

$a=5$，$b=4$

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
好数	*				*	*			*	*	*		*	*	*	*	*	*	*
坏数		x	x	x			x	x				x							

让我们看看头几个好数：

$$0=0\times 4+0\times 5,$$
$$4=1\times 4+0\times 5,$$
$$5=0\times 4+1\times 5,$$
$$8=2\times 4+0\times 5,$$
$$9=1\times 4+1\times 5,$$
$$10=0\times 4+2\times 5,$$
$$12=3\times 4+0\times 5,$$
$$13=2\times 4+1\times 5,$$
$$14=1\times 4+2\times 5,$$
$$15=0\times 4+3\times 5,$$
$$16=4\times 4+0\times 5,$$
$$17=3\times 4+1\times 5,$$
$$18=2\times 4+2\times 5。$$

现在，通过这一简单练习，我们可以得出一些有趣的观点，这些观点我们后面会用到。首先，我们可以猜想11将是最后一个坏数（最大坏数），在它之后的所有数都是好数。因此，让我们称12为第一个恒好数。我们怎么能知道11是最后一个坏数呢？是这样的，一旦我们发现了4个连续好数，就能知道其后的所有数都是好数！这是因为$a=4$，我们只要在前面的4个好数上加上一个a，就可以生成一组新的4个好数，如此可至无穷。所以，$13=2\times4+1\times5$，而$17=3\times4+1\times5$；$14=1\times4+2\times5$，而$18=2\times4+2\times5$，等等。因此，可以得出下面两点。

1. 对任意a和b，总存在一个最后的坏数。

2. 只要找到一串连续的a（$a<b$）个好数，就能找到这个坏数。这串数的头一个数就是第一个恒好数（比如本例中的12）。

当然，这些还不是结论，而只是些要关注的猜想。如果我们考查第1点，马上就能发现它对某些a和b是不成立的。假设a和b有公因子f（$f\neq1$），则a和b的所有线性组合都将是f的倍数。于是，如果$a=mf$，$b=nf$，则$c=ax+by$导出$c=mfx+nfy=(mx+ny)f$；即c总是f的倍数。因此不是f的倍数的任何数都将是坏数（因而有无穷多个坏数）。这意味着永远不会有恒好数。

因此，我们把第1点修改成如下说法：

1. 对任意互素的整数a和b，总存在一个最后的坏数。

现在，我们请读者通过更多的例子重复上面的过程，看看能否发现一个规律。对互素的a和b，我们总能找到一串a个连续好数，因而找到最后一个坏数和第一个恒好数吗？用下面的

数对试一下：

$$a=2, b=5;$$
$$a=3, b=5;$$
$$a=5, b=6;$$
$$a=5, b=7;$$
$$a=3, b=4;$$
$$a=4, b=7;$$
$$a=4, b=9。$$

这会花点时间，但有时不把手弄脏是很难解出一道数学题的！把你的结果同下表比较。

a	2	3	4	5	5	3	4	4
b	5	5	5	6	7	4	7	9
第1个恒好数	4	8	12	20	24	6	18	24

从上表中能找到规律吗？如果我们幸运，我们可以得出一个目前为止似乎与表中所有列相符的规律。你能看出来吗？

$$\text{第1个恒好数} = (a-1)(b-1)。$$

现在我们实际上有了一个具体的猜想，尽管它是通过反复试验得到的：

$$\text{最后1个坏数是 } (a-1)(b-1)-1 = ab-(a+b)。$$

现在我们已做好了进行证明的准备。我们将证明如下两点。

(i) 对互素的a和b，$ab-(a+b)$总是坏数。

(ii) 假定$a < b$，$ab-(a+b)$之后的连续a个整数都是好数。它们是

$$ab-a-b+1 = (a-1)(b-1),$$
$$(a-1)(b-1)+1,$$

$$(a-1)(b-1)+2,$$

$$\vdots$$

$$(a-1)(b-1)+(a-1)=(a-1)\,b。$$

(i) 的证明 我们用反证法证明，假定 $ab-(a+b)$是好数，然后证明这会导出矛盾。已知a和b是互素的正整数。

因此，根据假定，

$ab-(a+b)=ax+by$，其中x和y为非负整数。

根据这一假定，我们断言$y<a-1$。为证明此断言，我们注意到$ab-(a+b)<ab-b$，即$ab-(a+b)<(a-1)\,b$；因此y必小于$a-1$。否则，如果$y\geqslant a-1$，则$ax+by$将大于$ab-(a+b)$。

现在我们变换方程$ab-(a+b)=ax+by$为

$$x=\frac{ab-a-b-by}{a};$$

进一步变换可得

$$x=\frac{b(a-1-y)-a}{a}。$$

在此，我们观察到，如果$(w-a)/a$是整数，则a必整除w。因此，对整数x：a必整除$b(a-1-y)$。因为a和b互素，a不能整除b，这就意味着a必整除$a-1-y$。因为$y<a-1$，项$a-1-y$大于零。但是，它也小于a，意味着a不能整除$a-1-y$。所以，不存在这样的x实现上述的线性组合。于是，根据反证法，$ab-(a+b)$总是坏数。

(ii)的证明 我们一眼就可看出，最后面一个数$(a-1)\,b$总是好数，因为通过在$ax+by$中令$x=0$和$y=a-1$，正好得$(a-1)\,b$。所以我们实际上只需检验$a-1$个数$(a-1)(b-1)$，$(a-1)(b-1)+1$，

…，$(a-1)(b-1)+(a-2)=(a-1)(b-1)+(a-1)-1=(a-1)b-1$。

这$a-1$个数可以改写为$(a-1)b-k$，其中$k=1, 2, \cdots, a-2, a-1$。

再一次，假定a和b互素且$a<b$，我们令b为a的倍数加某个余数r：

$$b=qa+r，其中1 \leqslant r \leqslant a-1且q为整数。$$

我们注意到a和r也是互素的；否则，如果$a=md$，$r=me$，则$b=qmd+me=m(qd+e)$。因此b和a有公因子m，这与它们互素矛盾。

在开始证明前，我们看看另一组数：$r, 2r, \cdots, (a-1)r$。很明显，这些数都不能被a整除（因为a和r互素且这些数的每一项都是ir的形式，其中$i<a$）。a和r互素也意味着这些数被a除不可能有相同的余数。如果有相同的余数，则对某个$i<j$，数$(j-i)r$将能被a整除。因为$(j-i)r$是在我们这组数中，我们已经得知它是不可能被a整除的。（如果$ir=sa+z$且$jr=ta+z$，则$(j-i)r=(t-s)a$。）

现在，我们知道，如果用a除一个整数，将会有a个可能的余数：0，1，2，…，$(a-1)$。如果该整数与a互素，则余数不可能为0，因而有$a-1$个可能的余数。因为在序列$r, 2r, \cdots, (a-1)r$的$a-1$个数中，每个被a除时余数均不同，所以从1到$a-1$的每个数均会出现在这些余数中且只出现一次。

因此，对任意k，$1 \leqslant k \leqslant a-1$，上述序列中存在某个值$mr$，它被$a$除的余数为$k$，即$mr=na+k$。

现在，我们将$(a-1)b-k$写成$(a-1)(qa+r)-k$，继续证明它总是一个好数。首先，

$$(a-1)(qa+r)-k=(a-1)qa+(a-1)r-k。$$

在右边加减mr得到

$$(a-1)(qa+r)-k=(a-1)qa+(a-1-m)r+mr-k。$$

再在右边加减mqa得到

$$(a-1)(qa+r)-k=(a-1-m)qa+(a-1-m)r+mr-k+mqa。$$

变换右式，得

$$(a-1)(qa+r)-k=(a-1-m)(qa+r)+mr-k+mqa。$$

现在将$mr=na+k$代入，得

$$(a-1)(qa+r)-k=(a-1-m)(qa+r)+(n+mq)a。$$

剩下的就是记得$b=qa+r$，并将其代回上式，得

$$(a-1)b-k=(a-1-m)b+(n+mq)a。$$

上式对每个k值均成立，从而证明了我们的$a-1$个数$(a-1)b-k$ $(1\leqslant k\leqslant a-1)$中，每一个数都是好数。这是因为每个数都可以重写为$a$和$b$的线性组合$ax+by$，其中$y=(a-1-m)$，$x=(n+mq)$。

再加上$(a-1)b$是好数，我们已经证明存在a个连续的好数$(a-1)(b-1)$，$(a-1)(b-1)+1$，…，$(a-1)b$。

因此，我们也证明了$(a-1)(b-1)-1=ab-(a+b)$是最大的坏数，而$(a-1)(b-1)$是第1个恒好数，只要a和b是互素的！

现在，回到我们的故事中，我们终于可以欣赏拉维和戴维斯先生最后的对话了。月球岩石刚好重95克，塞到戴维斯包里的砝码片分别重9克和13克。我们知道对$a=9$和$b=13$，最大坏数为$(a-1)(b-1)-1=8\times12-1=95$。这是最后一个不能被9克和13克砝码片组合出的重量。如果月球岩石比95克重，不管重多少克，其重量都能被这些砝码片组合出来，这样，就没有办法证明戴维斯先生的清白了！

拓展

解决上述问题后，很自然地想知道，通过组合分别重a克、b克和c克的砝码片，能得到多少重量（当然这些砝码片的组合要放在一起在天平上称）。

更数学化地说，如果有正整数a，b，c，它们的线性组合，即$d = ax + by + cz$，可以得出什么数，不可以得出什么数呢？

这种简单的推广实际上使问题变得非常复杂，没有初等解法可解。但我们可以给出一个针对某些特例的技巧，就当好玩吧。

再次，我们注意到，如果3个数有公因子f，则它们的任意线性组合也一定是f的倍数，因此所有不是f倍数的数都是坏数，因而永远不会有最后一个坏数。所以，举例来说，a，b，c不能都为偶数，等等。

让我们用点智巧，看一个能解出的例子。如果$a = 12$，$b = 20$，$c = 33$，最后的坏数是多少？换句话说，不能表示为$12x + 20y + 33z$的最大整数是哪个？

我们把此式改写成$3(4x + 11z) + 20y$。现在，看看括号中的项$4x + 11z$，它是$a = 4$和$b = 11$的线性组合；从前面的讨论中，我们知道第1个恒好数是$(a-1)(b-1) = 10 \times 3 = 30$。因此，从30开始的所有数都能被括号中的项表示，我们可以用$(t + 30)$替代该项，前式变成

$$3(t + 30) + 20y = 3t + 20y + 90。$$

现在来看$3t + 20y$，它又是3和20的线性组合，所以它可以表示从$(3-1)(20-1) = 38$开始的所有数。因此，$3t+20y$可以用$s +$

38替换，我们的式子变成

$$s+38+90=s+128。$$

因此，所有从128开始的数都能用$12x+20y+33z$表示，且对$a=12$，$b=20$，$c=33$，127是最后的坏数。

这个小技巧实际上连续两次应用了前面导出的解法。但是请稍等，让我们再次考查我们的式子，确保其中没有圈套：

$$12x+20y+33z。$$

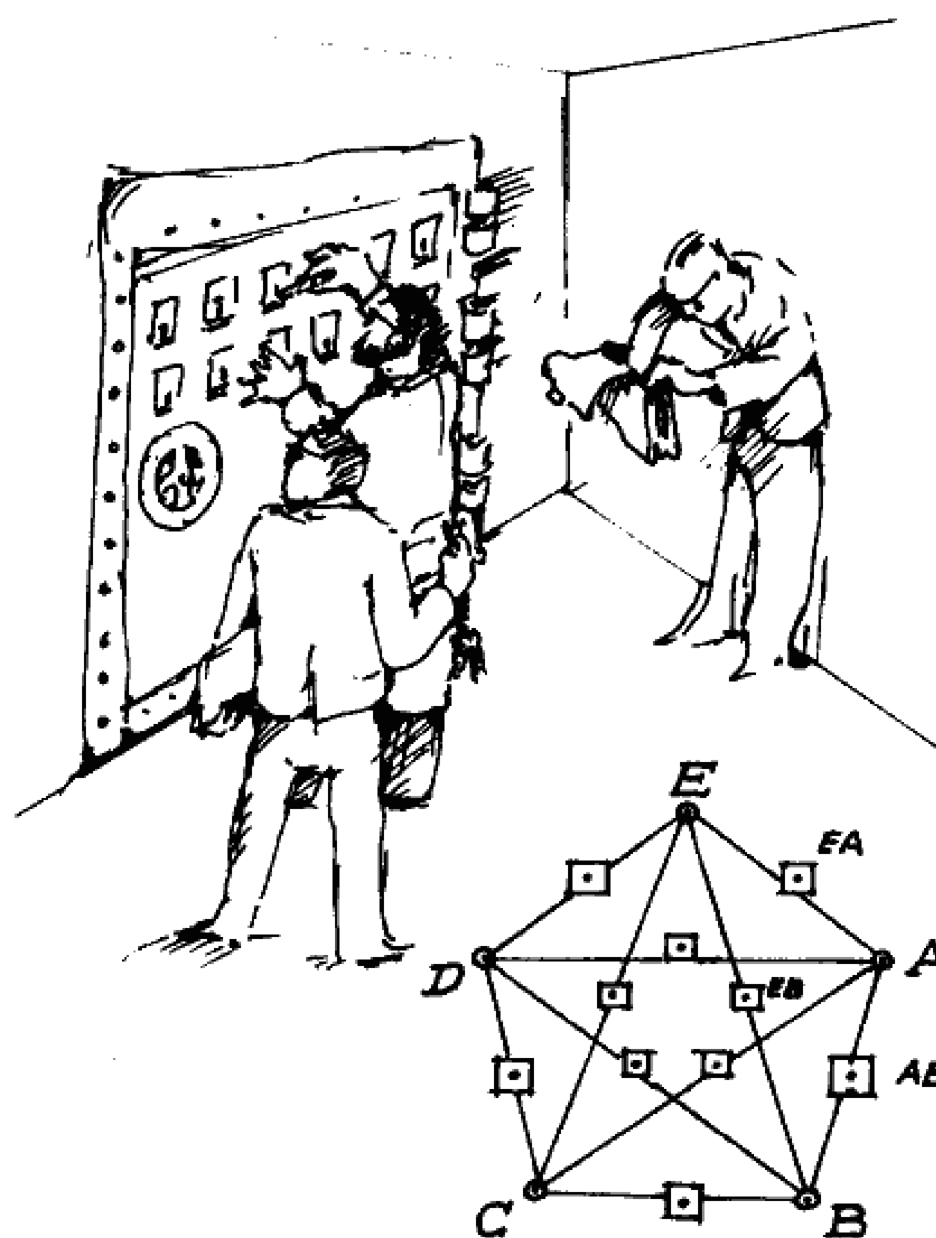
如果我们先把$12x+20y$放在一起并把式子写成$4(3x+5y)+33z$，结果如何呢？我们找找看。

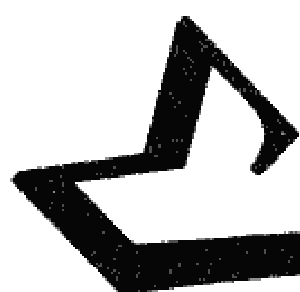
看看括号中的项$3x+5y$，我们知道所有从$2\times4=8$开始的数都能被它表示出来，因此我们将式子重写为

$$4(t+8)+33z=4t+33z+32。$$

现在，看看$4t+33z$，我们知道所有从$3\times32=96$开始的数都能被它表示出来。因此，所有从$96+32=128$开始的数都能被$12x+20y+33z$表示出来，再次得出127是最后的坏数。

当然，如果结果不同，我们的方法就不是有效的方法。但是请记住，我们是通过找到一个算法产生解题方案，从而获得结果。这与上一节找到一个简单的公式有很大不同，但为此花上一天也不是坏事！


E
EA
D
A
EB
AB
C
B



核文件失窃案

拉维今天上的是逻辑课，这与往常没什么两样。课上有个测验，只有两道多项选择题，各50分。不巧的是，因为复印机出了故障，拉维的第2道题印糊了，它只能看到题后的答案选项：

A）下述所有选项均正确。

B）下述所有选项均不正确。

C）上述所有项均正确。

D）上述各项有一项正确。

E）上述各项均不正确。

F）上述各项均不正确。

拉维并不知道这还不是他今天遇到的唯一挑战。当他回家时，发现一辆黑色豪华大轿车正停在他家车行道上。

"你就是拉维吧？"一个穿着考究的高个子男人从轿车后座出来，带着浓重的俄罗斯口音说。

"是的。"拉维回答。

"我是迪米特里·杜波夫，是……"

"我认识你，杜波夫先生，"拉维打断他说，"我在最近一期《物理档案》上读到了一篇量子力学的精彩论文，就是你们

的一位科学家写的。”

“哦，我的科学家都是很优秀的，拉维，但是我跟你要谈的可不是这些。”杜波夫先生靠近拉维说。“这就是我来这儿的原因，”他接着说，“我们在冷核聚变方面眼看就要有突破，但我们的保密出现了严重问题。有关核聚变机密公式的关键内容被盗了。它可值数十亿美元。”

“这可真是不幸，杜波夫先生。”拉维关切地说。

“据我所知，拉维，要是有人能破了此案，那个人就是你了。”

“我当然会尽全力，杜波夫先生，”拉维回答，“请告诉我详情。”

“这项工程有5位顶尖科学家：阿尔帕斯博士、贝塔博士、塞德里克博士、多布金斯博士和埃格兰博士。每天下班后，他们都把资料和结果锁进保险柜里。他们设计了一个安全系统，以防文件被盗，但却没有告诉我细节。我所知道的只是保险柜上面有多把锁，每把锁有多把钥匙。他们设计的系统能保证他们中的任何一个人，甚至任何两个人都不能打开保险柜。但他们中的任意三个人都能打开它，这样做的目的是当有一两个人生病或外出开会时不致中断工作。他们相信这样做能确保工作的安全，因为永远不可能有过半数的人串通起来盗窃。”

“您问过这些科学家了吗，杜波夫先生？”

“问过了，拉维。实际上我单独询问了他们每个人。他们都说一点也不知情。当然，我立即把他们手上的所有钥匙都收上来了。我收钥匙时，注意到埃格兰博士的钥匙比别人少一把。他说他没注意到自己丢了一把，因为最近没用上钥匙。他不知

道谁拿了，也没有告诉别人。我不知道是出了内贼，还是我们的某个竞争对手偷了，也许是与埃格兰合作的人，我想这可能性更大，因为他是唯一丢了钥匙的人。”

拉维认真听了杜波夫先生说的每个细节。接着他转过身，眼睛半睁半闭地在院子里来回踱步。几分钟后，他抬起眼说，“您能带我到保险柜边吗，杜波夫先生？若是能的话，你把收上来的钥匙也带上，我想我能告诉您谁偷了您的机密公式。”

拉维确实能破了此案。他是怎么做的呢？

分析

对有些问题，数学家会想法寻找答案；而对另外一些问题，他们只是想法证明有答案存在。本案就是后面这样的问题。我们不能和拉维一道去破案，但通过仔细的分析，我们可以理解他破案的过程，这样，当处在他的位置时，我们一样可以找到解决问题的方法。

分析中首先要弄清楚科学家们设计的安全系统。为简单起见，我们用五位科学家姓氏的首字母即A、B、C、D、E代表他们。如果这些科学家为保险柜设计了一个钥匙开启安全系统，他们中的任意两个人合起来都无法打开保险柜，但任意三个人一起却能打开，那么需要多少把锁，每位科学家又必须有多少把钥匙呢？

又如何用锁和钥匙的分配信息破解此案呢？

求解

我们需要的系统应该不能让任意两位科学家——（A，B）或（A，C）或（B，D）等——单独打开保险柜。因此，必须有一把锁他们把身上的所有钥匙都掏出来也无法打开。于是，我们可以假设每把锁上都标上了不能打开它的两位科学家姓氏的首字母。（当然，锁上并没有真正的标签，这样做的重要性在于，在我们的讨论中可以区分它们。）例如，标有AB的锁不能被一对科学家（A，B）打开，标有AC的锁不能被一对科学家（A，C）打开，等等。如此考虑问题，我们就会明白，需要的锁的数量至少应等于A、B、C、D、E这五位科学家可能的配对数。所以，我们需要

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10 \text{ 把锁。}$$

现在，任意一对科学家在保险柜前都会发现有一把锁（锁上标有他们的首字母）他们无法打开。

为算出每位科学家需要多少把钥匙，我们来考查一位科学家比如E的情况。当他与任意其他两位科学家比如（A，B）组合，他们三个人应该能打开保险柜。因此，他需要锁AB的钥匙[①]，因为（A，B）没有锁AB的钥匙。这一情况对 E 可能遇上的任意其他对科学家配对都是相似的。因此，对标有除他以外的所有科学家配对的锁，他都应有打开它们的钥匙，也就是说，他应该有

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6 \text{ 把钥匙。}$$

① 也标上标签AB，因而也可以称它为钥匙AB，后同。——译者注

因此，安全系统需要给保险柜上10把锁，每位科学家需要有6把钥匙。为把问题说得更具体些，我们可以说，对科学家E来说，他需要锁AB、AC、AD、BC、BD和CD的钥匙，也就是6把钥匙。他不能拥有余下的4把锁的钥匙。这4把锁恰好是标有他的首字母的4把锁AE、BE、CE和DE。这种情况对每位科学家都是一样的。

我们继续进行具体的分析。现在我们可以说10把锁为

AB、AC、AD、AE

BC、BD、BE

CD、CE

DE

科学家A将有锁BC、BD、BE、CD、CE和DE的钥匙；同样，科学家B将有锁AC、AD、AE、CD、CE和DE的钥匙。我们发现这两位科学家每位都有3把钥匙与对方不同（A有BC、BD和BE，而B有AC、AD和AE）。而且，他们有3把相同的钥匙（CD、CE和DE）。因此，当他们在一起，他们可以打开总共9把锁（用A独有的3把钥匙，B独有的3把钥匙，以及他们都有的3把钥匙）。但是，他们不能打开锁AB。

现在，我们看看任意一位其他科学家，比如E。他有钥匙AB、AC、AD、BC、BD和CD。当他与（A，B）相遇，他与A共有钥匙BC、BD和CD，同时与B共有钥匙AC、AD和CD。因此，A和B一起已经有E身上的6把钥匙中的5把：AC、AD、BC、BD和CD。但E带来了他们所没有的钥匙AB（见下页表）。因此3人一起就可以打开保险柜了。上述描述对任意一对科学家与第3位科学家相遇的情形都是对称的。

	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
A					🔑	🔑	🔑	🔑	🔑	🔑
B		🔑	🔑	🔑				🔑	🔑	🔑
C	🔑		🔑	🔑		🔑	🔑			🔑
D	🔑	🔑		🔑	🔑		🔑		🔑	
E	🔑	🔑	🔑		🔑	🔑		🔑		

弄清楚这种安全系统后，拉维首先像我们上面描述的那样把10把锁贴上标签。然后试着用收上来的每把钥匙开锁，根据它们打开的锁也给它们贴上标签。当然，他发现钥匙正如我们上面所述分布。使用这一系统，拉维发现埃格兰博士的钥匙链中丢了钥匙AB。就这一把钥匙是不可能帮单独一位科学家偷走保密公式的，但它可以帮助一对合谋的科学家，而且仅限于科学家（A，B）。因此，拉维能够认定阿尔帕斯博士和贝塔博士合谋盗走了秘密公式。

同样的分析使我们可以解决针对任意奇数个科学家的同样问题。因此，如果有11位科学家想要设计一个钥匙和锁安全系统，任意5人无法打开保险柜，但任意6人都可以打开它，他们需要

$$\binom{11}{5}=\frac{11!}{5!6!}=462\text{ 把锁。}$$

同时，每位科学家需要携带$\binom{10}{5}=252$把不同的钥匙。因此，我们可以发现，尽管这种系统富有创造性，但当科学家人数较多时，它会变得非常不具实践价值。

拓展

正如我们从本案中所学，当遇到复杂问题时，能够运用逻辑思维和逐步分析方法是相当有用的。这么说来，你能做出拉维的逻辑测验题来吗？拉维看不清楚题目，但他看清楚了多项选择答案：

A）下述所有选项均正确。

B）下述所有选项均不正确。

C）上述所有选项均正确。

D）上述各选项有一项正确。

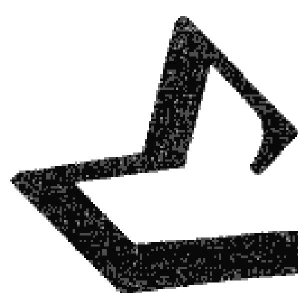
E）上述各选项均不正确。

F）上述各选项均不正确。

有时候，我们看到问题却不知道如何下手，在这种情况下，从最开头思考有时会很管用。

如果选项A正确，则选项B到F均正确。但如果B正确，则C到F必错，因此产生了矛盾。所以，可以排除A。如果B正确，则D必错；但否定“上述各选项有一项正确”就意味着（蕴含）不能选择B，又产生了矛盾。选项C意味着A正确，因为我们已经证明A不可能正确，故C也可排除。因为我们已排除了A、B和C，我们知道D不可能正确。现在，如果选择F，则A到E均不正确。但这也意味着A到D也是错的，从而得出E是正确的。这一矛盾排除了选项F。因此，E是唯一正确的答案。它意味着A、B、C和D均不正确，而刚才我们已经证明了这点。而且F也是错的，因为E是对的！





赌场命案

拉维对来赌城拉斯维加斯并不怎么感冒，但他父亲要来参加一个地方检察官DNA检测知识培训会议，学习案件中的DNA检测，就把全家都带过来了。不过，拉维的父亲说了，会议之后他们将开车去洛杉矶参观游览这个“世界上最快乐的地方”，而且在参观了加州理工学院后，他们还可以顺道在迪斯尼乐园逗留。

拉维不打算硬着头皮和妈妈、妹妹一起逛拉斯维加斯大道，他宁愿和爸爸一起听一些讲座。“可能还会学到一些东西。”他想。正当两人听一堂名为“滤泡和犯罪行为”（有关搜集和保存头发标本供DNA分析）的讲座时，拉维父亲的BP机响了。他们悄悄地从报告厅出来，拉维父亲去打投币电话，拉维则看着一个上了年纪的女人一手提着一桶二角五硬币，一手不停地拽着老虎机的把手。拉维的父亲脚步有些匆忙地回到拉维身边。

“什么事，爸爸？”拉维问。

“在一家名为甘比特（The Gambit）的新开赌场发生了一起谋杀案。赌场定于今晚开张。赌场老板乔·‘斯利克’·班比

诺[①]因为欺诈早就被伊利诺伊地区检察院盯上了，但一直没有足够的证据指控他。”父亲回答。

拉维一下子兴奋起来。昨天早餐时他一直在看《拉斯维加斯太阳报》，上面有篇文章提到了甘比特赌场今晚的开张庆典。乔·班比诺为吸引顾客推出了一种名为“胜算在你这边”的一次性赌博游戏，在开业的晚上，将抽出一名幸运赌客玩这种促销游戏。赌客可以最多掏出1百万美元作为赌本。玩法如下：用100张牌，其中55张牌面上写着“赢”，45张写着“输”。把这一百张牌洗好后扣在一张桌子上。赌客每次都须用他一半的赌本下注，如果翻出一张“赢”，就赢得赌注，也就是说他的赌本会增加一半；如果翻出一张“输”，他就输掉赌注，即他的赌本会输掉一半。赌客一次只能翻一张牌，一直到将100张牌翻完为止。完事后他就可以揣上赢来的钱回家了。

拉维和父亲到了甘比特赌场。拉维的父亲亮了亮他的地方检察官徽章，他们被领到了一间顶楼办公室。他们进房间时，拉维看到了地板上画出的尸体轮廓，显然，那是班比诺先生的尸体被发现的地方。

一名警官走了过来，瞅都没瞅拉维就对他父亲说：“谢谢您赶来。我们只是想让您知道一下斯利克的情况。我们知道你们检察院追踪他有段时间了。”

“谢谢，”拉维的父亲回答，“你们知道谁作的案吗？”

“不太确定，”这名警官答，“我们从办公室门把手上提取了三组指纹，已经识别出来了。一个是他前妻的，她显然有一

---

① 斯利克英文Slick意为狡猾的，故作者打了引号。——译者注

大笔离婚赡养费还在班比诺手上。第二个是莫蒂·怀特的，他是个游客，被抽中玩今晚的‘胜算在你这边’的游戏。他是一名从佛罗里达州坦帕市来的会计。他已经把10万美元的积蓄交给了甘比特赌场。第三个是托比·加西亚的，他是隔壁牛蛙赌场的老板，人们议论托比觉得甘比特赌场的开业对他的生意构成了严重威胁，有可能从他手上抢走至少一半的生意。

“我们几乎可以排除掉怀特先生。我们问他时，他说他将在今晚的促销赌局上赢一大把钱，没理由杀斯利克。斯利克的前妻说斯利克欠她六十多万美元，她不能证明自己不在现场。但按她律师的说法，她将拿到60万美元和利息。斯利克将付给她60万美元10年的利息，年利率6%，按季度计复利。她说不可能是她，因为她要杀了斯利克，这笔钱她就一分钱也拿不到了。另一方面，我们刚发现，斯利克在遗嘱里给她留了100万美元，她却说自己并不知情。”

警官停了一会儿，接着说：“我的几个人正在牛蛙赌场同加西亚先生谈话。他是我们的头号嫌疑犯，但他好像有不在场的证据。牛蛙赌场的酒吧招待和一些赌客说他昨晚整夜都在那儿。不管怎样，我确信马上就会戳穿他的不在场证据。”

警官说话时，拉维一直在旁观，既觉得有些好玩，又有些关心。他朝父亲贴过身说：“爸爸，他不是在开玩笑吧？”

“当然不是，拉维。你怎么这么说，有什么不对吗？”

拉维盯着爸爸说：“爸爸，我认为作案人是……”

你认为拉维怀疑谁呢？为什么？

分析

本案的破解需要回答下述问题：如果你拿出10万美元玩“胜算在你这边”的游戏，最后你会有多少钱呢？

求解

答案的基础是要认识到你翻牌的顺序并不影响结果。例如，如果你用100美元开始，翻到了一张“赢”，你就有了150美元；如果你接着翻到了一张“输”，你就只剩下75美元了。但如果你首先翻开的是“输”，你剩下50美元；接着再翻开一张“赢”，你仍然是剩下75美元。所以，一对“赢”“输”操作，不管顺序如何，都会使你的钱缩水至3/4。这是因为，在任何时候，如果你的赌本是Q，一次“赢”使它变成$(3/2)Q$；而一次“输”又把$(3/2)Q$变成$(1/2)((3/2)Q) = (3/2)((1/2)Q) = (3/4)Q$。进一步研究（或通过归纳法证明）可以得出，对给定的一摞牌，翻牌的顺序并不影响最终的结果。

因此，55张“赢”牌和45张“输”牌将把赌本Q变成

$$Q\left(\frac{3}{2}\right)^{55}\left(\frac{1}{2}\right)^{45}=Q\left(\frac{3}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{45}。$$

这与45对“赢”和“输”加上10张“赢”是一回事。

所以，如果用10万美元开始，最终的结果是

$$100\ 000\times\left(\frac{3}{4}\right)^{45}\left(\frac{3}{2}\right)^{10}\text{美元}=13.76\text{美元!!}$$

拉维很快认识到，怀特先生在“胜算在你这边”赌局中几乎要输个精光。拉维也认识到，怀特先生作为会计，一定也最

终发现了同样的结果，尽管只是在他押上了一生的积蓄之后。显然，和几乎每个听到这一赌博规则的其他人一样，他一开始以为这将给他带来一大笔钱。斯利克将它命名为“促销游戏”并采用抽奖方式选中玩家，进一步强化了这种错觉。避免输钱的唯一办法就是杀了斯利克·班比诺。拉维把这些猜测向警察作了说明。怀特先生并非惯犯，经不住多问就承认了所犯的罪行。

拓展1

既然我们了解了“胜算在你这边”赌局的出人意料的结果，那么让我们更深入地探讨其中的数学问题吧。

让我们再次回忆赌局中的规则。赌客用赌本M开玩，每次以手中的赌本的一半押注。如果他赢了，他押多少钱就赢多少钱；如果他输了，他将输掉押上的赌注。假定他押了n次，赢了其中的x次。n次过后他手上的钱变成

$$M(n)=M\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}。$$

如果他剩的钱少于开局时的赌本，我们就说他输了。我们希望回答的第一个问题是，为避免输钱，x必须多大？

为解决此问题，我们要计算输赢平衡点，在此点，玩n次后他手上的钱等于最初的赌本：

$$M\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}=M。$$

从式两边消去M，将幂在括号内分配，并回忆幂乘律$a^{b}a^{c}=a^{b+c}$，得到

$$\frac{3^x}{2^x}\times\frac{1^{n-x}}{2^{n-x}}=1$$
$$\frac{3^x}{2^n}=1$$
$$3^x=2^n。$$

现在，两边取自然对数，并回顾幂对数律 $\ln(a^b)=b\ln a$，我们得到

$$x\ln 3=n\ln 2$$
$$x=n\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)。$$

因此，我们得出了一个公式，用它可以计算打成平手应该赢的次数。如果 x 小于此值，赌客将会输钱，但若 x 大于此值，他将赢钱。

现在，$\frac{\ln 2}{\ln 3}=0.630\,93$（保留5位有效数字）。如果 x 为任意小于 $0.630\,93n$ 的整数，赌客都会输钱。因为我们不可能玩分数次，我们需要小于但最接近 $0.630\,93n$ 的整数。我们称这一整数为 $0.630\,93n$ 的地板函数，并用 $F(n)$ 表示它。因此，如果 $n=100$，则 $F(n)=63$。所以，如果赌客赌100次并赢 63 次，他刚好要输钱；而如果赢64 次，他手上的钱将比开始的赌本要多。我们可以通过直接计算验证这点：

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{63}\left(\frac{1}{2}\right)^{37}=0.9029\text{，它小于1，而}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{64}\left(\frac{1}{2}\right)^{36}=2.7087\text{ 。}$$

所以，胜算实际上并不在怀特先生一边。要想不输钱，他得赢

64次，而非55次。

现在，我们问一个更困难的问题。目前我们为赢和输的次数赋了值（比如在牌上写上“赢”和“输”）。如果赌客玩的是真实的赌博游戏，他每一局赢的概率为p，我们如何计算在n局后用p表示的他输的概率$P(n)$呢？

如果赌客赢的局数小于或等于$F(n)$，他将会输钱。因此，我们需要计算他赢0局、1局、2局等直到$F(n)$局的概率，并把这些值加起来。为计算这一算式，我们需要利用在“联赛舞弊案”解答一节中推导出的公式。如果我们记得那个公式，就会发现

$$P(n)=\sum_{x=0}^{F(n)}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\text{。}$$

这就是计算赌客最终输掉赌局的概率表达式。他赢得赌局的概率则为$1-P(n)$。最后，我们从输赢平衡点的计算得知$\frac{x}{n}=\frac{\ln 2}{\ln 3}$，它表示赢钱的局数比。因此，如果令$p=\frac{\ln 2}{\ln 3}$，则最终输掉赌局的概率将非常接近于50%。

拓展2

斯利克·班比诺的前妻是否也有杀人动机？如果他死了，她将得到1百万美元遗产。另一方面，如果他活着，她将得到60万美元加上10年以年息6%按季计算的复利。到底是他活着还是死后他前妻拿到的钱多呢？

如果本金P的年息为$r\%$，一年后连本带利为$P\left(1+\frac{r}{100}\right)$。

如果它加上又一年的利息，将变成

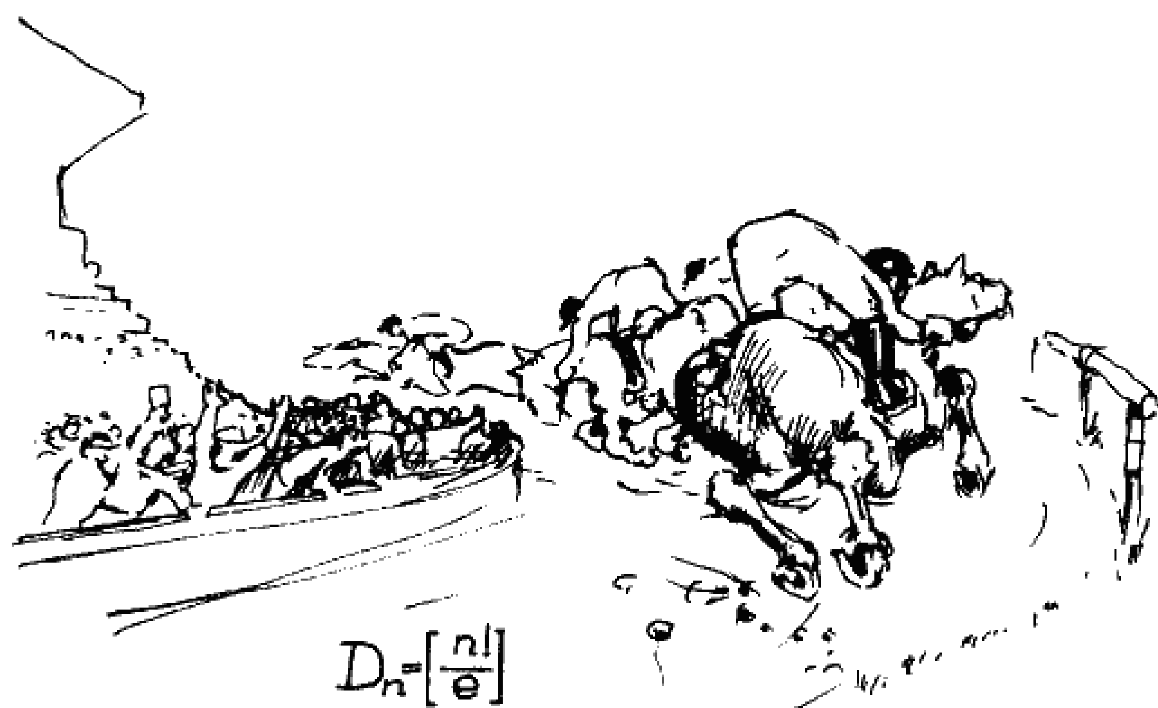
$$\left[P\left(1+\frac{r}{100}\right)\right]\left(1+\frac{r}{100}\right)=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2,$$

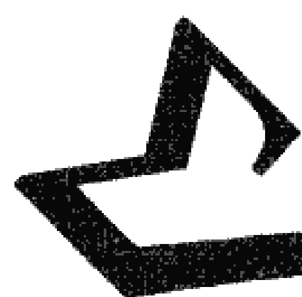
而且n年后它将变成$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$。

如果利息按季结算，则上述过程每季而非每年发生一次，每季利率为$\frac{r}{4}\%$。10年后，复利要计算40次（每年4季共10年）。所以，班比诺太太将得到

$$600\,000\times\left(1+\frac{6}{4\times100}\right)^{40}\text{美元}=1\,088\,411.05\text{美元}。$$

因此，她得到的离婚赡养费加利息要多于可拿到的遗产，也就不存在杀害斯利克的动机。


$D_n = \left[\frac{n!}{e}\right]$



赛马场赖账案

在拉维家里，就餐时总是免不了讨论父亲在审或要结却还有些疑问的案子。今天恐怕也不会是个例外。拉维的爸爸就像平时心里装着案子时一样，一声不吭地只顾着夹菜。拉维的妈妈笑着看着拉维吃饭，他们都知道很快爸爸就会抖落出案子的细节让拉维分析的。

“拉维，”父亲总算开了腔，“有件事你给出出主意。”

“当然，爸爸。”拉维回答。

“今天10个学生找到多布森队长举报他们在赛马场被骗了，他们希望多布森队长拘捕圣西蒙赛马场的老板托尼·拉维尔。多布森队长听了他们的遭遇后，认为他们说的没错，但他没有足够的证据拘捕他。当然，他还是把拉维尔叫来进行了讯问。”

“说详细点，爸爸。”拉维说。

“这些学生来自阿卡迪亚中学。他们一直抱怨课外活动太单调乏味，想寻点刺激。学校校长奥恩索尔博士提出到郊外赛马场赌马赛。在征得学生父母同意后，他们乘校车来到了赛马场。拉维尔专门为希望像父母一样参与赌马的孩子们设计了一种新的赌马游戏，名叫‘骏马排名’，他们决定玩这种游戏。只有4匹马比赛，在比赛前，你可以买10美元一张的卡片，你

认为哪匹马会得第几名就在卡片上写上它的名次。如果你一匹马也没猜对，你的10美元钱就输掉了。如果猜对了1匹马，你就能拿回你的10美元。要是猜对了两匹马，你的钱就翻番了，因而得到20美元。如果猜对了3匹马，你得到的是30美元。要是4匹马都猜对了，你的钱就翻两番了，最终拿回来的是40美元。”拉维的父亲解释道。

“有趣的游戏，爸爸，”拉维说，“学生们遇到了什么事呢？”

“他们每个人都说填了一张卡片，猜了马的名次。他们决定把赢来的钱平分。因为以前从来没来过赛马场，对参赛的马匹一无所知，他们只好瞎蒙了。他们说每个人都填了不同的名次，这样就会提高赌赢的机会。奥恩索尔博士证实他们每个人填的卡片都有不同之处。他替他们把卡片递进了窗口。比赛完后，他们去赛马场自助餐厅用完午餐就去窗口拿奖金。但托尼·拉维尔告诉他们谁也没中奖，也不打算给他们钱。”父亲回答。

“这太荒谬了，”拉维说，“他们有下赌的证据吗？”

“这个，他们应该有的，”父亲回答，“每张卡片都有一张收据，上面复写了他们填的内容。问题是他们把收据都弄丢了。他们把收据都交给他们中的齐吉·普莱斯保管，但他不小心把它们落在了男厕所的洗手池台上，等他们回来找时，这些收据都不翼而飞了。而且，他们都不记得自己填写的名次了。他们为此吵了起来，结果都搞糊涂了。但有几个人发誓说有一匹马的名次是猜对了的。拉维尔看到他们丢了收据，就说查过了他们的卡片，但没有一个人猜对，于是他撕掉了这些卡片，每次

比赛后他都是这样做的。”

“他是这么说的？”拉维问。

“是的。我有多布森队长问讯他时作的笔录，他在上面签了字的，”拉维的父亲把笔录递给拉维。“多布森队长说他撒了谎，但我们苦于没有任何证据拘捕他。”

“你们当然有证据，爸爸。告诉多布森队长起草逮捕令吧。”拉维说，一边找着饭后甜点。

拉维的证据是什么呢？他怎么知道拉维尔有罪呢？

分析

10位学生和奥恩索尔博士证实每位学生在卡片上为4匹马填写的排名都不同。拉维尔声称10张卡片都未押中，没有一张卡片猜中了哪怕一匹马的名次。

为把这一事实转为我们可以着手处理的问题，我们把4匹马按最终名次编号为1号、2号、3号和4号。也就是说，1号马是最先到达终点的马，而4号马是最后一匹到达终点的马。我们将按上述编号把他们的猜测表示为马匹的排序，放在集合大括号内。因此，正确的结果是{1，2，3，4}。猜出这种顺序的学生应该在第1个位置填上了最后获得第1名的马匹的编号，在第2个位置填上了最后获得第2名的马匹的编号，在第3个位置填上了最后获得第3名的马匹的编号，在第4个位置填上了最后获得第4名的马匹的编号，也即把所有4匹马都放在了正确的位置上。现在，10位学生每个人都填了卡片，猜测一匹马在第1位，另一匹马在第2位，等等。像上面一样用编号表示这

些马，则每个人的猜测都对应着集合{1，2，3，4}的一个排列。

当然，一匹马也猜不中的可能是存在的，比如一张卡片上填的是{2，3，4，1}，对应的猜测是，2号马（最终获得第2名的马）将得第1名，3号马（最终获得第3名的马）将得第2名，依次类推。这一猜测没有一个位置正确。在数学上，这种情况叫错位排列，或称无定点排列。如果有一匹马位置正确，则得到的是1定点排列。

拉维尔声称没有一名学生猜中任何一匹马，这就是说，10位学生的卡片都对应一个错位排列。

我们的问题是，对集合{1，2，3，4}来说，可能存在多少个错位排列？

求解

因为这一问题只涉及一个很小的集合，所以可以通过蛮力解决。我们可以列出{1，2，3，4}的所有排列。因为n个元素可以用$n!$种方法排列，所以我们有$4! = 24$种这样的排列。（与“篮球联赛舞弊案”中不同，这里要考虑顺序！）接着，我们可以计算其中有多少是错位排列。

但是，我们还是更一般地解决这一问题吧。对任一集合$\{1, 2, \cdots, n\}$，我们称其错位排列数为D_n。

我们将用下述*递推关系*（即依赖于其前面结果的关系）推导出D_n的公式。如果存在一个错位排列，则1号马不在其正确位置。我们从1号马被排在位置2的情况开始考查。这可分成两个子情况：

(a) 2号马排在位置1。

(b) 2号马没排在位置1。

在(a)的情况下，要得到一个错位排列，我们需要剩余的$n-2$匹马也排在错误的位置。因为1号马和2号马的位置已固定，此时的计算与从只有$n-2$匹马开始是一样的。因此，这一子情况下错位排列的总数就是D_{n-2}。

在(b)的情况下，要得到一个错位排列，2号马不能排在位置1（否则就是(a)的情况），3号马不能排在位置3，k号马不能排在位置k，等等。这种情况只有1匹马的位置是预先确定的（1号马），因而错位排列数为D_{n-1}。其中2号马不能排在位置1而不是位置2这样的事实并不重要。

同理可处理1号马排在位置3、位置4或位置k的情况。因此把所有可能的错位排列加起来，对1号马的所有不同的错误位置共有$n-1$种这样的可能性。于是，

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})。$$

这导出了一个递推公式，通过它我们可以计算$n=4$时的错位排列数D_4。

我们知道$D_1=0$。换句话说，如果只有一个元素，我们不可能把它排在错误的位置。同样，我们还知道$D_2=1$，即在{1，2}的两种排列{1，2}和{2，1}中，只有一种是错位排列。

因此，$D_3=2(D_2+D_1)=2(1+0)=2$。

进一步，$D_4=3(D_3+D_2)=3(2+1)=9$。

所以，对4匹马的排位，只有9种可能的错位排列（即无定点排列）。如果10位学生中的每一位都填写了不同的排列，则至少有1位的排列不是错位排列，因此拉维尔的口供是在撒谎！

拓展1

我们使用这里引入的递推方法探讨有关错位排列的另两个有趣问题：

1. 对n个元素的集合，出现错位排列的概率P_n是多少？

2. 我们不得不一步一步通过前面的排列数计算新的排列数。但能否找到一个公式，对任意n，使计算快些呢？

出现错位排列的概率是错位排列数D_n除以可能的排列数$n!$。所以，

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{D_n}{n!} = \frac{(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})}{n!} \\
&= (n-1)\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{D_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{D_{n-2}}{(n-2)!}\right] \\
&= (n-1)\left[\frac{1}{n}\cdot P_{n-1}+\frac{1}{n(n-1)}\cdot P_{n-2}\right] \\
&= \frac{(n-1)}{n}\cdot P_{n-1}+\frac{1}{n}\cdot P_{n-2} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)P_{n-1}+\frac{1}{n}P_{n-2} \\
&= P_{n-1}-\frac{1}{n}(P_{n-1}-P_{n-2})。
\end{aligned}
$$

现在，我们知道$P_1 = 0$，而$P_2 = 1/(2!) = 1/2$。所以，用上述公式，我们可以计算出

$$P_3 = P_2-\frac{1}{3}(P_2-P_1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3},$$

$$P_4 = P_3-\frac{1}{4}(P_3-P_2)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{8},$$

等等。如果把它们变换一下形式，会出现一种模式：

$$P_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times3} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!},$$

$$P_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times3} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2\times3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}。$$

你可以用更多的例子试验上述模式。实际上，尽管是个挑战，你可以通过归纳法证明下述通式是成立的（这里略去其证明）：

$$\begin{aligned}P_n &= P_{n-1} - \frac{1}{n}(P_{n-1} - P_{n-2})\\ &= \frac{1}{2} + \frac{-1}{2\times3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2\times3\times4\times\cdots\times(n-1)} + \frac{(-1)^n}{2\times3\times4\times\cdots\times(n-1)\times n}\\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\\ &= \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!},\end{aligned}$$

其中 $n = 2, 3, 4, \cdots$。注意求和可从 $k = 2$ 开始，因为$P_1 = 0$。

现在，我们求出了 P_n 的公式，而且它不是递推式！还有更好的结果，我们从这个公式还可以求得 D_n 的公式：

$$D_n = n!\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!},$$

或者展开为

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right),$$

因为 $P_n = D_n/(n!)$。

如果你熟悉 e 的无穷和表示，你可能会想起括号内的级数（它表示P_n）当 n 趋于无穷时趋近 1/e。

事实上这个级数收敛至其极限的速度很快，如下页表所示。

n	P_n	n	P_n	n	P_n	n	P_n
2	0.5	4	0.3750	6	0.3681	8	0.3679
3	0.3333	5	0.3667	7	0.3679	9	0.3679

快速收敛的原因在于部分和每次只改变$1/n!$。因此，在$n=7$以后，出现错位排列的概率在小数点后4位实际上是保持不变的。所以，对较大的n，错位排列数可以简单地用$n!/e$的最近整数计算：$D_n = n!/e$的地板函数。

拓展2

从商人托尼·拉维尔的角度看，他（平均来看）在赌局“骏马排名”中能赚到钱吗？

我们将再次从一般意义上回答这个问题，我们假定有n匹马参赛，赌注为1.00美元。如果参与者押的是一个无定点排列，则他得到的将是0.00美元；如果他押的是一个1定点排列（即他押对了1匹马），他得到的将是1.00美元，等等。因此，如果他押的是一个k定点排列，他得到的将是k美元。

我们令集合$\{1,\cdots,n\}$的k定点排列数为$F_n(k)$。于是，出现k定点排列的概率为$F_n(k)/n!$。所以，对1.00美元的赌注，平均起来，拉维尔的期望赔付额为

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{kF_n(k)}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}kF_n(k)\text{。}$$

为计算$\sum_{k=0}^{n}kF_n(k)$，我们发现它表示集合$\{1,\cdots,n\}$的所有可能排列中的所有定点排列的总和。因此，我们可以从列出$\{1,\cdots,n\}$的所有$n!$个排列着手，每一行列出一个排列，并将位置正确的数都标上下划线。下面是一些例子：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \cdots & \underline{n} \\
2 & 4 & \underline{3} & 1 & 7 & \underline{6} & n & \cdots & 5 \\
3 & \underline{2} & 5 & \underline{4} & n & \underline{6} & \underline{7} & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{array}
$$

这样，举例来说，每次3出现在第3列，都将会被加上下划线，因为它处在正确的位置。

通过观察这些行，我们发现，对任意k，将有$F_n(k)$行有精确的k个加下划线的点。因此，对特定的n，与全部行中的所有加下划线点对应，总的定点数为$k\,F_n(k)$。

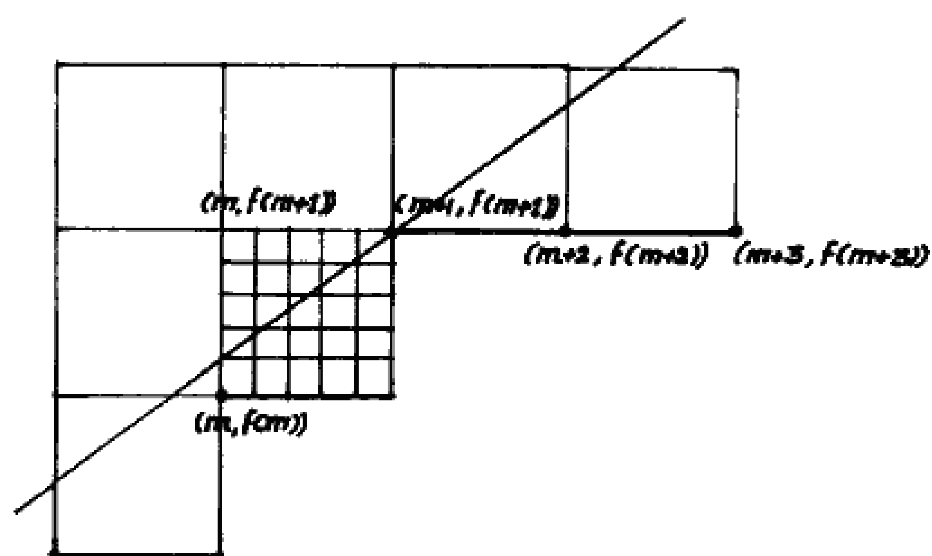
现在，让我们一列一列地计算所有加下划线的点数。每列有$n!$项（因为每一排列都占一行）和n个可能的数字，因此，每个数在每一列都出现$n!/n=(n-1)!$次。特别地，在第j列，数j出现$(n-1)!$次。在第j列的任意其他数字都未加下划线。所以，在每一列，正好有$(n-1)!$个加下划线数。因为共有n列，总的加下划线数的个数为$n(n-1)!=n!$。

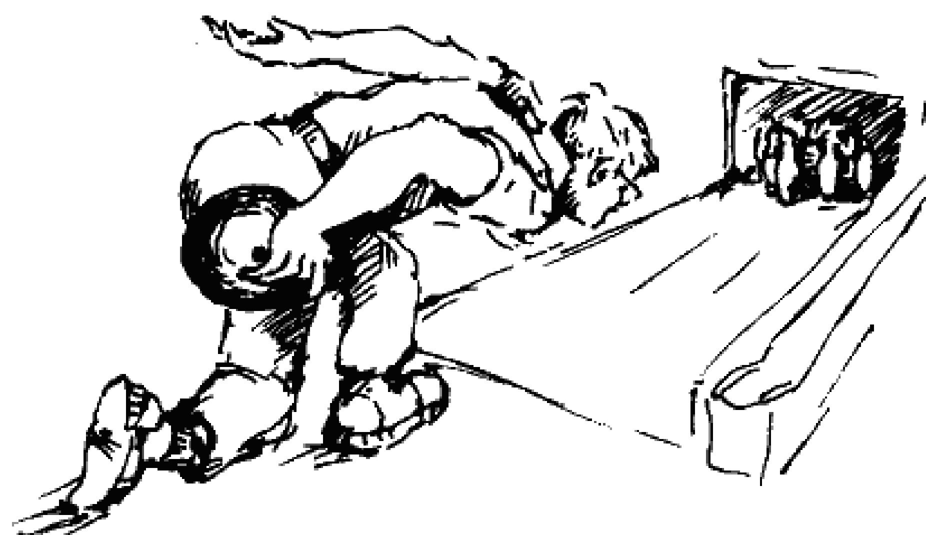
因此，我们得出$\sum_{k=0}^{n} kF_n(k)=n!$。因而对1.00美元赌注的期望赔付额为

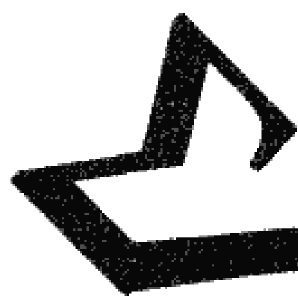
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{kF_n(k)}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}kF_n(k)=\frac{1}{n!}\cdot n!=1.00\text{美元。}$$

所以，拉维尔在他设计的小游戏中赚不到钱。这可能就是他发现有机可乘时要从学生手上昧钱的原因。

当然，我们也发现这种计算方法与对任一随机排列计算k的期望值完全是一回事。换句话说，如果我们取$\{1,\cdots,n\}$的任一随机排列，可以期望，平均来说，有一个数会出现在其正确位置，而且这一结果与n无关。你觉得怎么样？


(m, f(m+1))
(m+1, f(m+1))
(m+2, f(m+2))
(m+3, f(m+3))
(m, f(m))





保龄球参赛名额之争

周二晚，当拉维打完篮球回家时，他惊讶地看到父亲靠在躺椅上看报。

“您在家干嘛呢，爸爸？今天是周二，您该去练保龄球才对。下周冠军联赛就要开打了。”拉维说。

“我得把名额让给我们队的替补马丁·克雷斯特，”拉维的父亲垂头丧气地回答。除了保龄球外，他什么运动都不擅长，保龄球可是他的最爱。

“怎么会这样，爸爸？”拉维关切地问。

父亲慢吞吞地回答：“我们约定根据全中率决定谁上。马丁把这事很当真，这两个月来一直在练习连续全中，甚至与周一队、周三队和周五队打球。他随身带了一个掌上电脑连续记录他的全中率，每打一格[①]就更新全中率数据。我们刚开始约定时，他的全中率为70%。昨晚他给我们队长韦伯斯特打电话，说他的全中率正好达到了90%。昨晚他打了289分。听到这个消息后，韦伯斯特就把我的第4号位置给了他。”

① 一局保龄球有10个记分格，这一格可击球1到3次。若全中即1次击倒全部10个球瓶，则本格击球完成；若未击出全中，则还可补击一次，本格击球完成；只有最后一格补中或连续全中可击球3次。本书因为术语lattice也译为格，为避免混淆，后文称保龄球的一格为一回合。——译者注

“真遗憾，爸爸。你现在感觉怎么样？”

“一点儿也不好。”拉维的妈妈一进房间就插嘴道。

“不是这样的，”拉维的爸爸回答，“我只是有一点儿不愿意相信，就这些。”

“要只是‘有一点儿不愿意’，我才不会打电话让克雷斯特把他的击球率表格传真给你。”拉维的妈妈反驳。

“好啦。我这一年来都在为这次冠军联赛忙活，结果在最后时刻被顶替掉了，当然有点儿懊恼。话说回来，懊恼也没用了。克雷斯特的数据帮了他。他的全中率从0.7提高到了0.9，这就是事件的全部。”拉维的爸爸说，一边从报纸底下抽出一摞纸，向空中摇了摇。

“哦，我很高兴您没把这事太放在心上。”拉维同情地说，向爸爸丢过去一个微笑。

“我会好起来的。我只是有点儿失望，但我会好起来的。拉维，请帮我把这些表格扔到垃圾筒里去。我要去洗手吃晚餐了，我们还是不要再谈论它了。”拉维的爸爸从躺椅上起身，把报纸和那摞表格递给拉维。

大约十分钟后，拉维的爸爸走进厨房。拉维的妈妈正忙着收拾桌子。拉维站在厨房的垃圾筒旁，他的一只脚正踩在垃圾筒的踏板上，垃圾筒的白色盖子张开着。拉维在全神贯注地研究数据表。第一张表的第1列的头一个数值是0.700 00，而最后一张表的最后一个数值是0.900 00。在这中间，是上百个数值，代表了每一回合投球后的全中率，比如0.701 49，0.702 97，0.711 54，0.708 13，等等。

“你在做什么，拉维？”他父亲问。

拉维抬起头，脸上有些疑惑。“爸爸，还有表格在哪儿？”

“都在这儿，”他父亲答，“你都看到什么了，让你一脸困惑？”

“我困惑的不是我看到的东西，而是我没有看到的东西，”拉维答，“这些不是克雷斯特先生电脑里的数据表。这些数值是伪造的，爸爸！”

拉维是什么意思？

分析

这里的关键是弄清楚我们究竟需要解决什么问题。拉维是在寻找一个特殊的数值。为理解他的思维过程，我们提出如下问题：

如果一位保龄球员连续记录他的全中率，或一位篮球运动员连续记录他的罚球命中率（或做任意这样的序贯二值试验），而且数值从70%开始，最后升到90%，不管产生70%和90%的分子分母是多大，其间这一数值必须在某一点精确等于80%吗？

如果你能解决这一问题，你就会理解拉维是如何证明克雷斯特伪造了数据表的。注意我们处理的是二值试验，因为每一次尝试（保龄球的一个回合，一次罚篮），你要么成功（全中，罚中），要么失败。

话说回来，拉维的父亲又夺回了在球队中的位置，最终他们队卫冕成功了。

求解

如果一位保龄球员的全中率为0.7，后来他打得越来越好，全中率提高到0.9，其间必有一刻他的全中率为0.8吗？

这是个有欺骗性的问题。你可能认为答案一定是“否”。当碰到全美所有保龄球馆的租鞋价格的平均值这样的对象时，当然可能“跳过”某个值。但我们面对的并非是任意值。你可能会惊奇地发现，我们的问题的答案总是“是”！

为处理这一问题，我们得返回到术语*序贯二值试验*（sequential binary trial）上来。当我们计算保龄球的全中率时，我们拥有的实际上是一个试验（针对击出全中的回合数也即试验数）序列，每一试验要么成功，要么失败。我们把这些值用序偶（成功试验数，总试验数）即（全中数，击球回合数）表示，或用符号表示为（s,f）。例如，（7，10）表示击球10回合，其中有7个回合是全中。

注意值s和f必须为大于或等于0的整数。而且，s必须小于或等于f。关于我们的全中数与回合数的序偶的另一有趣事实是，可能的序偶构成一个*格*（lattice），如图1所示。

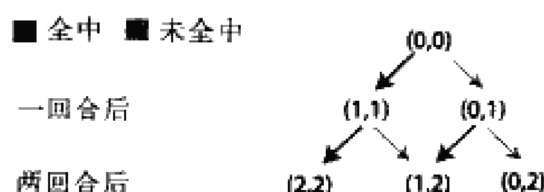


图1 构造格的第一步

我们考查一个更大的格的例子。图2中的格中的点表示经过20回合后所有可能的全中序偶。格中的路径表示一位保龄球员全中率的进步情况。在这20回合中，该球员先是连续4个全

中，接着丢掉了2个回合，紧跟着击出3个全中，随后又丢掉了2个回合，最后连打了9个全中。你可以把特定的全中率看成是在序贯二值试验构成的格中穿越的线。在图2中，我们发现该球员从未出现过60%也即0.6的全中率（尽管在第11回合时为7/11 = 0.636 36接近0.6）。在给定的格中，60%线经过了4个格点（3，5），（6，10），（9，15）和（12，20），见图2中的4个暗点，这是因为

$$\frac{12}{20}=\frac{9}{15}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0.6\text{。}$$

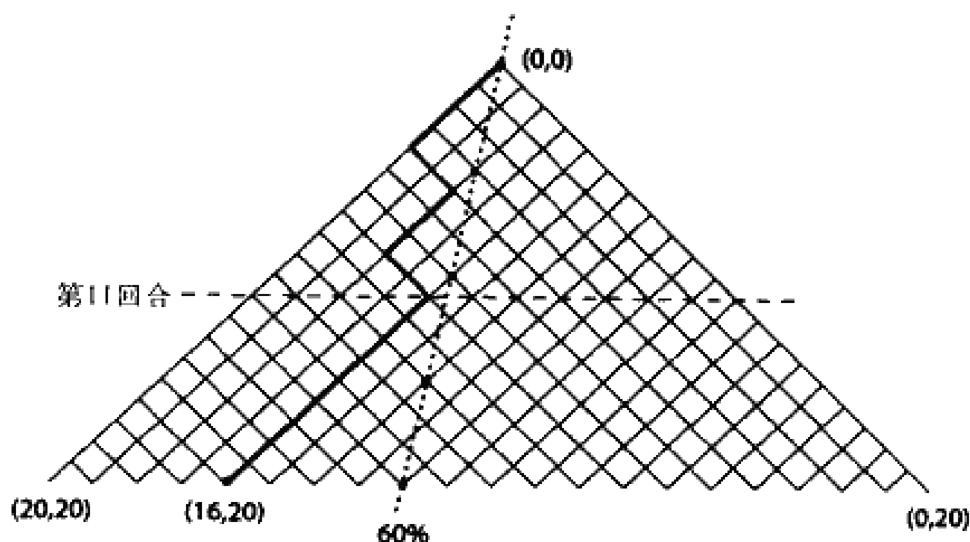


图2 一个20回合格显示了一位保龄球员的成绩提高过程和他的全中率线

把全中率70%、80%和90%都当成格中的线。球员从对应70%全中率的线上的一个格点开始，最后落在定义90%全中率的线上的某个格点上。在某一点，球员的进步路径一定会穿过80%线，从图3 (a)可以看出这是显然的。这种情况可以有两种方式发生：

1. 80%线正好在一个格点上穿过路径。

2. 80%线在两个格点间穿过路径。

如果发生第1种情况，则0.800 00应该已经出现在数据表上。因为拉维在数据表上找不到0.800 00，我们假定克雷斯特的全中率从70%提高到90%属于第2种情况。因此，80%值必定在两个相继的表格项之间，也就是说，80%线从两个相继的格点之间穿过。我们令这两个格点为（s_k, f_k）和（s_{k+1}, f_{k+1}），则

$$\frac{s_k}{f_k} < 0.8 < \frac{s_{k+1}}{f_{k+1}}。$$

或者，表示为更好用的分式

$$\frac{s_k}{f_k} < \frac{4}{5} < \frac{s_{k+1}}{f_{k+1}}。$$

因为我们面对的是格点，$f_{k+1} = f_k + 1$。如果球员在第f_{k+1}回合未能全中，则$s_{k+1} = s_k + 0 = s_k$。但是，

$$\frac{s_k}{f_k+1} < \frac{s_k}{f_k}。$$

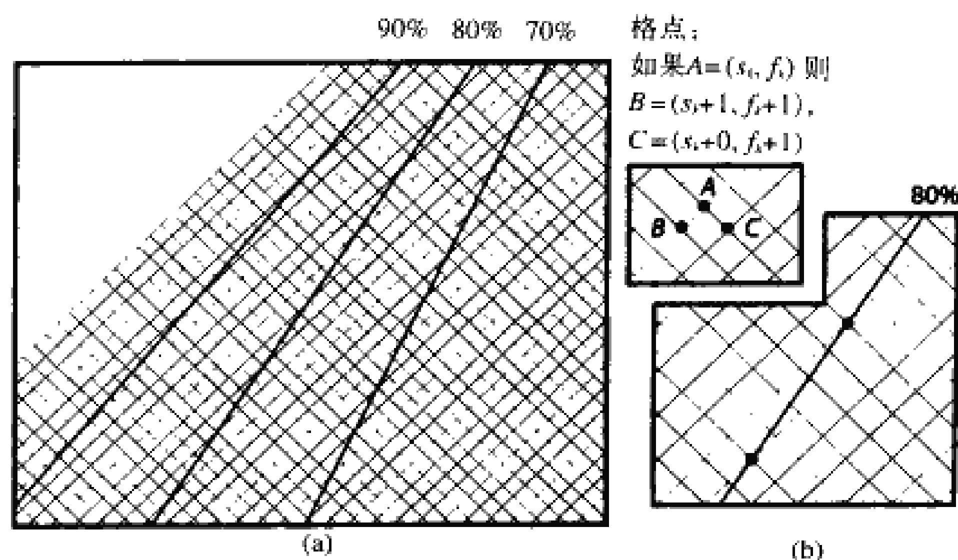


图3 (a) 要从70%提高到90%，必须穿过80%；

(b) 形象地“证明”球员的路径必精确地落到80%线上

因此，球员在第f_{k+1}回合一定击出了全中，这样，$s_{k+1}=s_k+1$。这就得出

$$\frac{s_k}{f_k}<\frac{4}{5}<\frac{s_k+1}{f_k+1}。$$

此式可分成两个不等式：

$$\frac{s_k}{f_k}<\frac{4}{5}，\quad \frac{4}{5}<\frac{s_k+1}{f_k+1}。$$

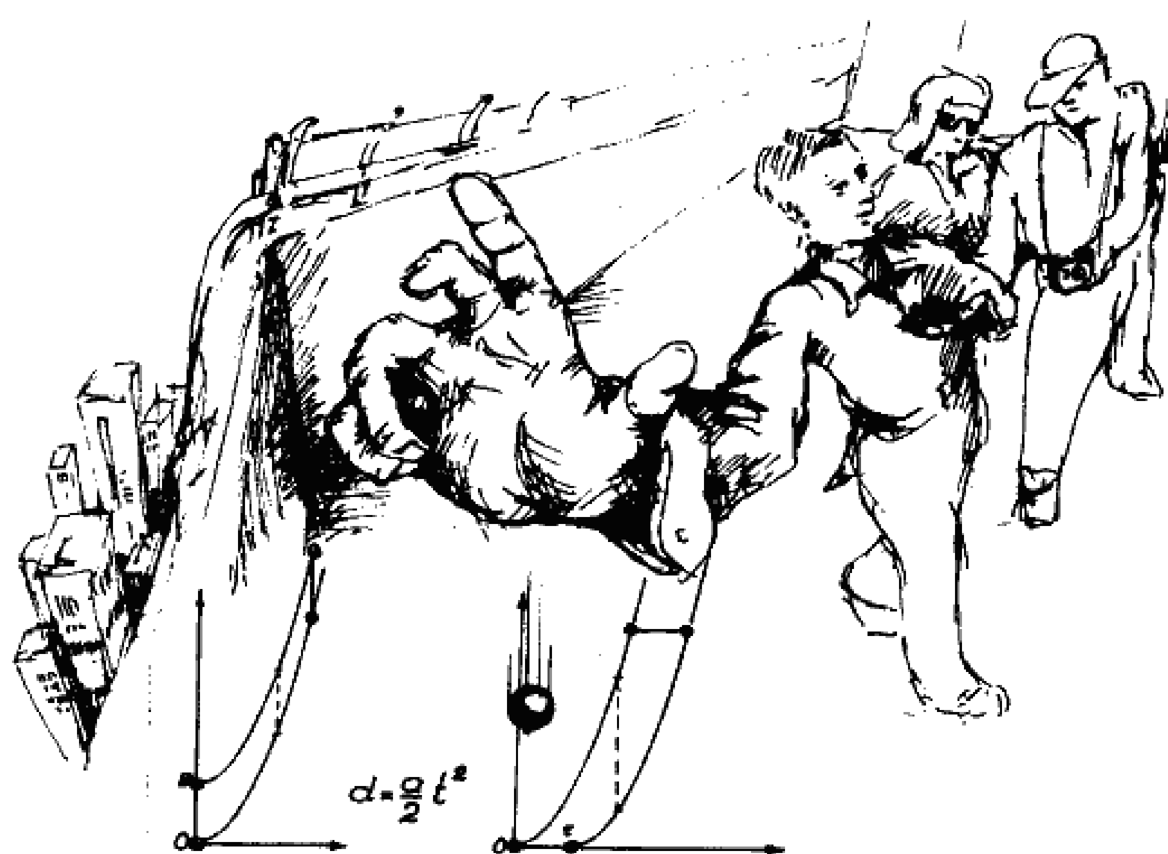
第1个不等式等价于 $5s_k<4f_k$，而第2个不等式说明 $4f_k+4<5s_k+5$，即 $4f_k<5s_k+1$。把它们联立起来，得

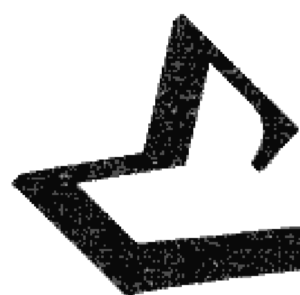
$$5s_k<4f_k<5s_k+1,$$

但这不可能是真的，不存在一个整数$4f_k$处在整数$5s_k$和它紧挨着的整数$5s_k+1$之间。这就好比说一个整数的4倍处在20和21之间一样——这是不可能发生的。

换个说法，如果全中率穿过80%线，则它必精确地落到80%线上。使用图3(b)可以形象地验证这一事实。

因为0.800 00未出现在克雷斯特的数据表上，拉维断定这张表肯定是捏造的。


$d = \frac{a}{2} t^2$



钢珠伤人案

这一天刚开始时，正是一个典型的闲散的周六，拉维和父母边吃早点边闲聊着。但电话突然响了。拉维的妈妈已经被周六早晨的电话铃整怕了，因为它通常意味着她的丈夫，一位芝加哥地方检察官，又要去处理案子了。今天果不其然。拉维的妈妈接了电话，转动着眼珠把电话交给丈夫，一边说，“是多布森队长。他说有个案子要你去。”

拉维的爸爸挂上电话后转向拉维说：“我得去趟西尔斯大厦[①]。显然有几个小孩从楼顶扔下了两颗钢珠。有一颗钢珠砸到了楼底下的人。他正躺在慈济医院里，情况很危急。你想和我一块儿去吗？”

“不，谢了，爸爸。我今天早晨要编好一个电脑程序。”拉维回答。

“得了，今天早晨你就忘了你的程序吧。跟着我，我会在道上给你买你最爱吃的甜甜圈。”他父亲哄道。

这可是个难以抗拒的诱惑。除了数学，拉维最爱的就是甜甜圈了。看到他单薄的体格，谁又能看出他和甜甜圈的亲密关系呢？

---

① 芝加哥市中心最高的摩天大厦。——编者注

“好吧，爸爸，我算服了你了。”拉维微笑着说。

他们到达西尔斯大厦时，楼周围已被警戒线隔离，有一些警车停在大楼前。他们从几个穿制服的警官身边走过时，拉维还在掸蓝色衬衫上的糖屑。多布森队长迎上他们并迅速介绍了情况。“所幸的是，”他说，“这件事被摄了下来。受害人是个演员，正以西尔斯大厦为背景拍保险广告。结果那颗钢珠击中了他的头，把他砸昏了。”

“我还以为有两颗钢珠呢。”拉维的父亲插嘴说。

“是有两颗钢珠，”队长回答，“第二颗在第一颗后面落下，掉在了旁边。从胶片上看，第一颗钢珠砸中人时，第二颗还离地约30英尺。所幸他们用的是广角镜头，要不然在空中很难找到第二颗钢珠。”

“是谁作的案？”拉维的父亲问。

“两个少年，”多布森队长气愤地说，“我们逮住了他们，目击者还在楼顶上。”

乘了好长时间的电梯后，拉维、拉维的爸爸，还有多布森队长来到离地1 431英尺的楼顶观景台上。一位穿制服的警员走过来，立即汇报了他们掌握的情况。显然，疑犯是16岁的约瑟夫·亨得里克斯和15岁的托米·阿斯顿。四位游客证实他们看到约瑟夫快速地把手伸出栏杆外，瞬间后托米也把手伸向栏杆外。两个男孩都朝楼下看了看就突然转身向电梯跑去。所幸电梯上满是下楼的人，电梯服务员没让他们进去，他们只好等下一趟。与此同时，楼下保安通过无线电通知有人向栏杆外扔下了东西，电梯于是被关闭，两个小孩被困在了楼顶。

“目击者确实看到钢珠被扔下了吗？”拉维问警员。

“不。实际上没有人看到钢珠坠落，因为这一切来得太快了。但他们知道男孩站立的地方，而钢珠掉落的地方就在他们下面。”警员回答。

“对我来说，这就够了，”队长说，“我们还是去取那两个小阿飞的口供吧。”队长对拉维的父亲说。

拉维则旁观了多布森队长和拉维的父亲分别对两个嫌疑人的问讯。拉维知道分开讯问嫌疑人是警察的常规工作。这样警察才有机会发现他们的供述中的矛盾，也让嫌疑人有机会揭发别人。

约瑟夫·亨得里克斯蓄着刺猬头，一副无赖的样子。他拒绝回答任何问题，不时怒视着多布森队长说：“我是个小孩，我什么也不想说。”

托米·阿斯顿则不然，他脸色苍白，惊慌失措，仿佛意识到了事态的严重性。他答应把一切都说出来。他说约瑟夫把两颗钢珠扔下了楼，自己与此事没有任何关系。

“有目击者说看到你在约瑟夫之后把手伸到了栏杆外。我们知道你扔下了第二颗钢珠。你抵赖是没有用的。如果你坦白，我保证事情会变得对你更有利。”拉维的父亲生气地说。

“不，不，你们完全弄错了！”托米抗议，“我伸出手是为了阻止他，因为我发现他要往下扔珠子。”

拉维看到托米在父亲和多布森队长面前紧张的样子，开始为他难过。

“那么你是说亨得里克斯扔下了两颗钢珠，年轻人？”多布森队长以怀疑的口吻问道，“他只向外伸了一回手，四位目击者都是这么说的。他没有伸第二回，而你却紧随他把手伸了

出去。”

“我说过了，我是想阻止他。”托米申辩，他的眼泪都快流出来了。

“那么是谁扔的第二颗钢珠呢？”多布森队长继续冷冷地说。

“他一次扔下了两颗钢珠。”托米回答。

“废话！”队长反驳，“这一切都被拍下来了。第一颗钢珠落地时第二颗还在离地30英尺的地方。他一次扔下两颗钢珠不可能出现这种结果。”

队长转向一位穿制服的警员。“我们处理完了。把他们带到警局。”他指着托米和约瑟夫说。

“等等，队长，”拉维突然插嘴。警员收了手。看到队长对他这么重视，而且领略过他破解别人都束手无策的迷案的神奇本领，这位警员本能地把他的话当成了命令。

“怎么回事，拉维？”队长问。他凭经验知道，如果拉维有什么疑问，就一定要引起重视。

“有件事我要核实一下。”拉维说。他走到队长跟前小声说，“我不能确定这个小孩在撒谎。我想验证一下他所说的情节。我需要两个钢珠，和扔到楼下的两个钢珠一样。我还需要目击者在场。而且，你认为摄像人员愿意帮我们吗？我需要他们摄下我扔下钢珠的过程，看看我们能否再现发生的事件。”拉维心不在焉地说，脑海里想着要测试的不同场景。

“摄像人员当然会帮我们，拉维。但我们不能占太长时间了。目击者一大早就被我们一直留在这儿。而且，就像我相信你的智力一样，我对这些少年犯也有足够的经验，我知道他们

什么时候在撒谎。”队长回答。

不久，拉维站在目击者面前，摄像人员则在他身后拍摄。

“嗯……对不起，各位，”拉维慢悠悠地开始，对着目击者说，“我需要你们感觉一下第一位嫌疑人伸出和收回手的快慢。我将试试不同的动作，请你们告诉我哪个动作和你们原先看到的相符。”拉维自信地当着四位不耐烦地站在他面前的大人说。

拉维把两颗钢珠放在右手，并排地握在拳头里，并保持两球水平。他伸出手很快松开大拇指、食指和中指，让第一颗钢珠坠落。钢珠不到1秒就跌落到地面。随后他松开无名指和小指，让第二颗钢珠坠落，随即收回手。整个过程不到2秒。

“亨得里克斯伸出和缩回手有这么快吗，还是我太快了？”拉维转向目击问。

目击者彼此瞧了瞧，每个人都说不是太快，而是太慢了。拉维逐渐加快速度重复了上述过程几次。在最后一次试验中，他飞快地伸出手并松开手指，让两个球紧挨着坠落，并立即收回了手。

目击者都认为他的最后一次试验与亨得里克斯的动作最接近。

“非常感谢大家，”拉维说，“我的试验完了。”

等目击者走后，拉维跟父亲和队长坐在一起检查拍摄的胶片。他们仔细地一帧一帧地查看了最后一次试验的胶片。当拉维松开他的大拇指、食指和中指时，第一颗钢珠从他手中坠落。他继续用连贯的动作松开其他手指，第二颗钢珠随即几乎同时坠落。在看片器下用精密的测量工具测量，第二颗钢珠松开时第一颗钢珠仅仅坠落了约2英寸。

"这就够了，拉维，"队长说，"你可以清楚地看到，当你像亨得里克斯一样的速度试验时，两颗钢珠的距离只有2英寸，而不是30英尺。钢珠显然会以相同的速度坠落。所以，亨得里克斯不可能扔下了两颗钢珠。亨得里克斯扔下了一颗，而阿斯顿扔下了另一颗。这是唯一符合逻辑的解释。"

"我完全同意，队长。我会指控他们二人。"拉维的父亲说。两人都转过身开始向电梯走去。

但他们突然被拉维的声音拦住了："别走开，先生们。我们还是算对了再说吧。"

分析

在探讨这个问题之前，我们需要了解一下有关自由落体的物理知识。为了简化，我们将忽略空气阻力，因为我们讨论的物体是小的钢珠，其空气阻力很小。

坠落的物体基本上是在重力加速度下运动，所以它们的运动方程同在恒定加速度下运动的物体的运动方程是一样的。

对任何匀速运动的物体来说，我们知道其运动距离就是速度和时间的乘积：$d = vt$，其中d是距离，v是速度，t是时间。

但是，以恒定加速度运动的物体，其速度是不断变化的。例如，如果物体以5英尺/秒的初速度开始，以5英尺/秒^{2}的加速度加速，则1秒后其速度变为10英尺/秒，2秒后其速度变为15英尺/秒，等等。在此条件下，速度是时间的函数，其方程为$v_f = v_0 + at$，其中v_0为初速度，v_f为终速度，a为加速度。这样，速度不再是常数，而是时间的函数。如果加速度是常数，则这一函数为线性的。

这使得以时间为函数的距离的计算变得困难起来。但对速度变化的运动来说，有件事实是永远成立的，那就是，距离永远等于平均速度与时间的乘积：$d = v_{avg}t$。现在，如果速度随时间线性增加，则平均速度可简单表示为$(v_f + v_0)/2$，其中v_0为初速度，v_f为终速度。所以，我们可以说

$$d = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t。$$

现在，我们将$v_f = v_0 + at$代入此方程，得到

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2。$$

如果物体的初速度为0，我们有

$$d = \frac{1}{2}at^2。$$

这将是我们计算自由落体（即物体从某人手中松开）的关键方程。本案中加速度a为重力加速度，已知其为32英尺/秒^2。此时你可能认为这么说不公平，因为如果你没学过物理，你怎么能知道解此问题要用到的这个值呢？后文我们会回到这一问题的。

现在，我们已准备好跟上拉维的思路考查这一案例。队长和拉维的父亲提出下述观点（没有借助方程）：两颗钢珠的下落是相同的，因此如果开始时相隔2英寸，则在下落过程它们将保持2英寸的距离不变。这似乎能说通，因为两颗钢珠的坠落都是由方程

$$d = \frac{1}{2}at^2$$



决定的。这种推理错在哪里呢？你能看出队长和拉维的父亲所犯的错误吗？

错就错在他们的前提不正确。他们分析的是下述问题：如果两个相同的钢珠相距2英寸，一个在上，一个在下，它们同时跌落，当第一颗钢珠落地时，第二颗钢珠离地多高？但是，如果我们细心思考当时的情景，我们发现正确的问题应该是这样的：一颗钢珠坠落下2英寸后，另一颗钢珠从第一颗钢珠原来的高度开始坠落，它们都继续往下坠落。当第一颗钢珠落地时，第二颗钢珠离地多高？

如果问题这样提出，会有什么样的不同呢？这就是现在你要解决的问题。

求解

为简化求解，我们假定钢珠从西尔斯大厦坠落到地面（实际上，第一颗钢珠砸中了受害者的头部，大约离地6英尺高，但这对我们的讨论没有什么影响）。

那么，我们如何求解此题呢？首先，我们定下要使用的单位是英尺和秒，以及重力加速度（等于32英尺/秒^2）。现在，我们令西尔斯大厦高h（到顶层的高度是1431英尺）。看看下面的方法：我们计算第一颗钢珠下落h–0.167英尺（即比大楼高度低2英寸）所花的时间t_1。我们可以用下面的方程计算：

$$h-0.167=\frac{1}{2}at_1^2。$$

然后，我们可以用t_1计算第二颗钢珠下落的距离。这听起来不错，但有一个问题：它完全是错误的！我们又一次掉进了

假定第一颗钢珠从静止开始坠落，只不过比第二颗钢珠低2英寸的陷阱。这实际上与队长和拉维父亲犯的是同样的错误。那么我们如何才能正确地求解此题呢？

我记起一部电影里的一句台词，当时一匪徒威胁某人吐出情报，他说："我们要搞到它可是容易得很，说不说你看着办。"且让我们容易地说出来吧。

我们令西尔斯大厦的高度为 h，假定物体坠落（忽略空气阻力）距离 h 所需时间为 t，并假定第二颗钢珠扔下前第一颗钢珠下落的距离为 s，所用时间为 τ。于是我们的问题就变的非常简单了：第二颗钢珠在 $(t-\tau)$ 时间内下落多少距离？我们令这一距离为h'。因此，我们得到下述方程：

$$h=\frac{1}{2}at^2,\quad s=\frac{1}{2}a\tau^2,\quad h'=\frac{1}{2}a(t-\tau)^2。$$

我们要求得的是第一颗钢珠落地时，第二颗钢珠所在的高度，即$h-h'$。这一差值可如下计算：

$$\begin{aligned}h-h'&=\frac{1}{2}at^2-\frac{1}{2}a(t-\tau)^2\\&=\frac{1}{2}a\left[t^2-(t^2-2t\tau+\tau^2)\right]\\&=at\tau-\frac{1}{2}a\tau^2\\&=at\tau-s。\end{aligned}$$

把前两个方程作一下变换，得

$$t=\sqrt{\frac{2h}{a}},$$

$$\tau=\sqrt{\frac{2s}{a}}\ 。$$

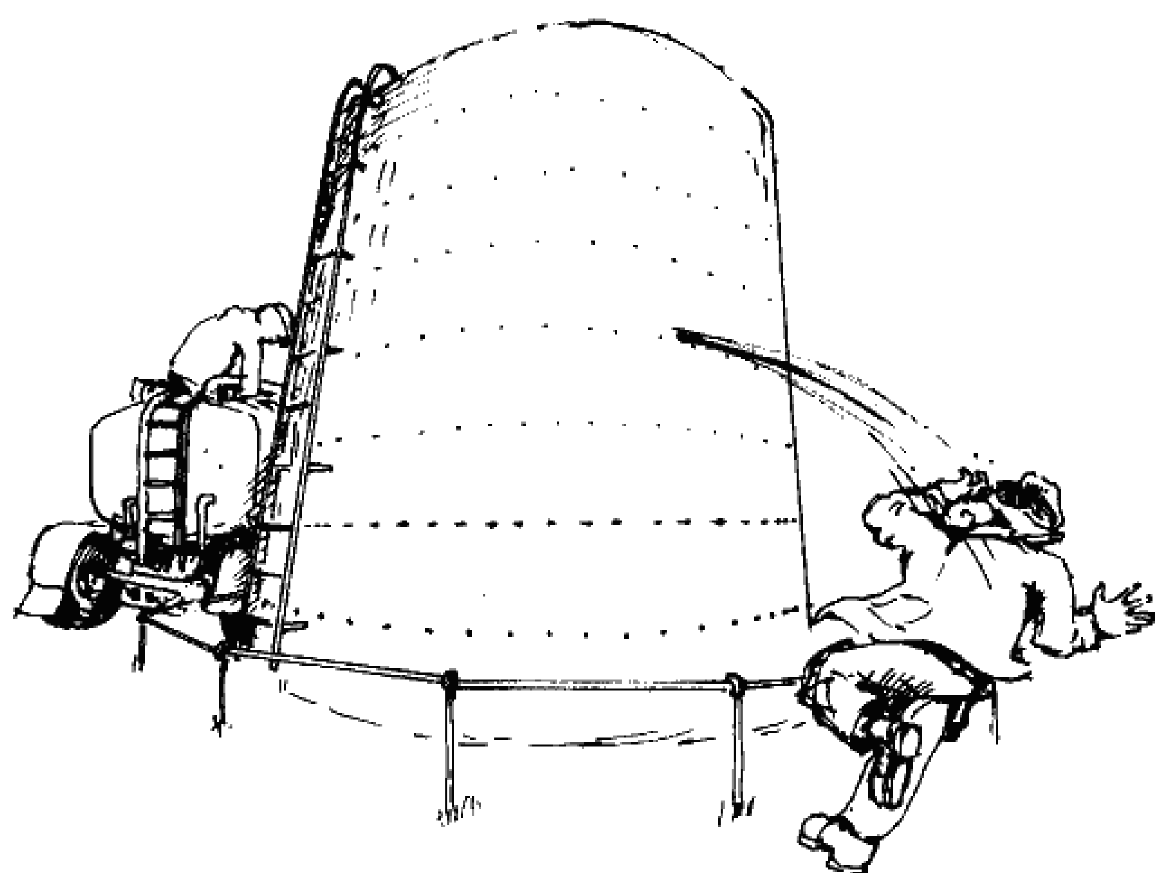
把上述结果代入$h-h'$的公式，得

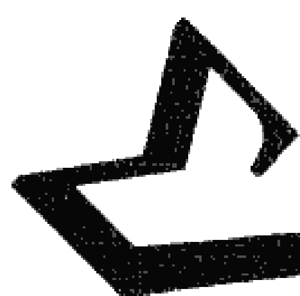
$$h-h'=a\left(\sqrt{\frac{2h}{a}}\times\sqrt{\frac{2s}{a}}\right)-s=2\sqrt{hs}-s\text{。}$$

在我们的问题中，h 为西尔斯大厦的高度，约 1 431 英尺，s 等于 0.167 英尺（即 2 英寸）。因此，可算出 $h-h'$ 为 30.75 英尺。

这确实是一个令人吃惊的结果，也就是说，如果一颗钢珠在另一颗钢珠下落 2 英寸后下落，到它们下落西尔斯大厦那么高时，它们的距离就会增加到超过 30 英尺。没有人会想到这一点，但当拉维摆出他的计算时，人们发现，它与实际上是亨得里克斯扔下了两颗钢珠的看法是相符的。最终，只有他被判有罪，而且阿斯顿的证词也得到采信。

最后，还有一个问题需要说清楚。对那些因为好像要知道重力加速度的值（a = 32英尺/秒^2）才能求解而感到不公平的人来说，你会发现，在我们找到的解法中，我们实际上根本不需要知道这个值——它在方程中被消除掉了，我们一次也没有用到它！





化工厂液罐泄漏案

今晚的咖喱羊肉味道好极了，看来拉维的妈妈厨艺又有了长足的进步。但萨吉夫·拉韦尚卡博士只是动了动叉子，他显然没有胃口。上周发生的一些事令他郁闷不已。这正是拉维的父亲今晚把这位朋友请来吃晚饭的原因——为了使他振作起来。可惜拉韦尚卡博士无法忘掉他的麻烦事，而是一遍一遍地向这一家人倾诉他的故事，好像仍然不相信已经发生的一切。

拉韦尚卡博士是尚卡化学制品公司的总裁和创始人，这是一家坐落在威斯康星州南部一片密林区的化工厂，生意一直不错，从芝加哥往北一个小时左右就到了。由于拉维对化学很感兴趣，他爸爸曾带着他造访过这里，拉韦尚卡博士亲自领着他们参观了整个化工厂。拉维参观了不同化合物的析出与提纯过程，最令人叹为观止的景象是众多巨大的圆柱形金属罐，里面装着准备销往不同行业的大量化学液体。

然而几天前，工厂里发生了意想不到的事故。那天下午，工厂的保安约瑟夫·斯塔克豪斯在厂里巡视时，一场不可思议的事故导致一座储液罐里喷出的化学制品溅到了他身上。谁能想到，附近林区的一个猎人一颗流弹竟把一座储液罐射了个洞，罐里的化学溶液随即喷射出来，约瑟夫·斯塔克豪斯躲避不及

被溅了一身。幸亏罐里贮存的是40%的醋酸，其酸性相当弱，只对皮肤有轻微灼伤。

拉韦尚卡博士第一眼看到约瑟夫·斯塔克豪斯时，发现他伤情不重，心里便释然了。给斯塔克豪斯治疗的大夫说，他要几周的时间就可完全康复，唯一的后遗症是他的胳膊上会有轻微的皮肤脱色。

但昨天拉韦尚卡博士却接到了斯塔克豪斯先生的律师打来的电话，律师在电话里说斯塔克豪斯先生打算就其蒙受的身体和精神伤害立即起诉尚卡化学制品公司。律师声称，因为本地区有时会有猎人打猎，尚卡化工厂应该对储液罐加固以防被子弹击穿。

拉韦尚卡博士解释说工厂附近根本没有猎物，猎人从来不曾在附近出现，而且，发生这样的事件的概率也微乎其微。然而，拉韦尚卡博士清楚地知道，这场官司将从经济上拖垮他上半辈子苦心经营的成果。况且，他对发生在斯塔克豪斯身上的事也感到非常内疚，甚至都不打算对这场诉讼抗辩。拉维听到这一切，也觉得这场官司的赔偿会是个天文数字。

拉韦尚卡博士说得越多，他就越觉得沮丧。最后，他停止了叙说，从夹克口袋里扯出一摞纸来甩到餐桌上，“都在这儿了——这就是尚卡化工厂的灭顶之灾。”

拉维也为父亲的朋友感到难过，他了解这位执着的科学家，是个好人。几分钟的沉默过去了，餐桌边的每个人都感到了难堪。拉维没事找事地够着拉韦尚卡博士扔在桌上的事故报告，开始翻阅起来。

报告的第一页说，斯塔克豪斯先生是被一辆大型液罐卡车

的司机发现的，司机当时正在被击穿的储液罐的另一侧抽取罐中的溶液。司机叫了救护车，而且因为他听到了枪响，他也叫了警察。拉维在浏览事故报告时，发现警察做了非常详细的调查，记录了事故的所有细节。例如，储液罐是个高20米、直径10米的大圆桶，罐周围10米围着一圈安全绳，以防工厂的访客太过靠近它。液罐车司机登记的入厂时间是下午4点12分。他检查了罐上的液面高度，他的记事本上说罐里充满了液体。他把卡车挂在液罐上，在4点26分开始从罐中抽取液体。约25分钟后，他听到了一声枪响。他立即关闭了抽液泵，罐上的时钟记录的阀门关闭时间为4点52分。他说枪响后大概1分钟，斯塔克豪斯从罐的另一侧跑过来，大声呼喊："救命！帮帮我！我被溅了一身！"

就是在这个时候，卡车司机叫了救护车和警察。警察到达后，确实也注意到了液体正从罐上的小弹孔往外喷溅——他们测得弹孔离地面9.5米。

令拉维印象深刻的是，警察在得知斯塔克豪斯的伤势轻微后，马上去医院做了笔录。斯塔克豪斯无法提供枪响的准确时间，只是说在下午4点半到5点之间。他说他正在罐的四周巡视，和往常一样，就在绳子圈起的区域内。他知道有辆卡车来装运液体，但枪响时他看不到它，因为它在罐的另一侧。他听到枪响时，便感到有液体溅到身上，躲都来不及躲。意识到眼前发生的事故后，他便沿着罐跑向司机并呼救。

拉维全神贯注地读着报告的细节，居然没有注意到旁边的人都离开了餐桌，去了客厅。拉维慢慢地往后挪了挪椅背，又沉思了几秒钟，这才起身走向客厅，并打断了房间里的对话，

"卡车从罐中抽液的速度有多快？"

众人惊讶地抬头看着拉维。拉维的鲁莽令他母亲很尴尬，她教过他，打断别人谈话前一定要说"对不起"的。事实上对拉维来说，这么失礼是罕见的，因为他是个非常懂礼貌的年轻人。拉韦尚卡博士答话了："它的速度可快了，我们的新型高压抽液系统每分钟能抽3000升。"

拉维又沉思了一会儿，他的双眼闭着，每当构思一道新的数学方程时，他都会做出这种举动。当他睁开眼时，他问拉韦尚卡博士，"从罐中找到子弹了吗？"

"没有，它肯定在罐底。"拉韦尚卡博士答。

"哦，我想你会需要那颗子弹的。"拉维说。

"为什么？"拉维的父亲插话问。

"为了证明斯塔克豪斯是个骗子。"拉维满怀自信地说。

分析

拉维思考的全部问题如下：如果储液罐被子弹打穿，在打穿的一刹那液体开始往外流时，液体喷出液罐的速度是多少？在思考这一问题时，他发现约瑟夫·斯塔克豪斯讲的故事里有个明显的矛盾。

把这一问题放到我们熟悉的场景中可能更容易思考。我们来考虑一个装满水的简易水杯，而不是尚卡化工厂的充满了醋酸的大型储液罐，并提出同样的问题。

提示：这个问题要用到一点物理知识，我想本书的绝大多数读者都学过高中物理，我们不妨简单地回顾一下。

首先，想一想是什么让水从杯壁上往外喷的。驱动水从杯

孔里往外流的能量是从哪里来的呢？

答案背后的基本原理是封闭系统中的能量守恒定律。从孔中喷出的水的动能等于杯中水的势能的变化。

回忆一下，以速度v运动的质量为M的物体，其动能的一般公式为$\frac{1}{2}Mv^2$，而处在高度h且质量为M的物体，其势能为Mgh，其中g表示重力加速度。

使用上述公式，我们可以说，如果物体从高度h处下落，则它到达地面时的速度v_f，可以通过假定它的所有势能转化成动能来计算。因此，如果我们从

$$\frac{1}{2}Mv_f^2 = Mgh$$

开始，则马上可以得出$v_f = \sqrt{2gh}$。

现在，我们已知物体的初始速度为零，且已计算出它到达地面时的最终速度。我们还可以回忆到，在钢珠伤人案的求解中，我们讨论了，因为重力加速度的作用，下落物体的速度是随时间线性增加的，落地的时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

这为我们解决问题提供了全部工具。

要注意的是，我们在求解中再次使用上面的一些变量名时，它们代表的对象会有所不同。重要的是懂得物理概念并能运用它们。

求解

考虑如下问题。

给定充满水的高度为h的圆柱形水杯，如果在杯壁上开一个孔，水会喷出并飞出一定的水平距离a后落到地面。我们试问：

水平距离a依赖于杯顶到小孔的距离d吗？当水开始往外流时，可以预测它往外喷多远吗？换句话说，可以构建一个理论模型，计算作为d的函数的a吗？

这是个困难的问题，因为似乎水的喷射距离受相互制约的因素的影响。流出孔的水与它上面的水的压力有关。因此，孔越低（即d越大），则促使水流出的压力越大。水将以一定的水平速度v喷出并下落垂直高度$h-d$到达地面。水到达地面的时间t只与这一高度有关。水飞行的水平距离是水平速度v和时间t的函数：$a = vt$。

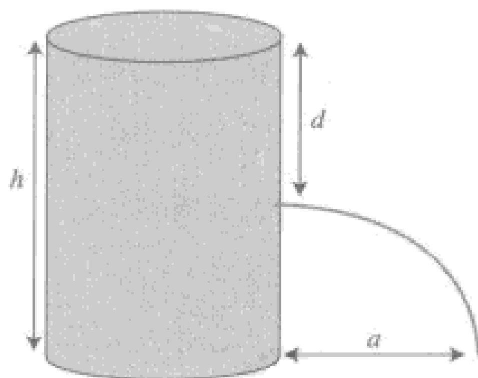


图1　圆柱形水杯的一侧有个孔

看上去似乎，d的值越大（即孔越低），则a将越大，因为水平喷射速度v也越大。但是，相应地，因为水的下落距离$h-d$也小了，它的水平飞行的时间t也变小了。

为了获得水平喷射速度，我们需要计算开孔时离开水杯的水的动能。根据能量守恒定律，它与杯中水的势能变化相等。考虑图2a，图中我们把杯内的空间分成了3个部分。我们分别

称它们为区间1、区间2和区间3。在开孔前，每一区间分别有固定的势能E_1、E_2和E_3，杯中水的总势能为$E_1+E_2+E_3$。

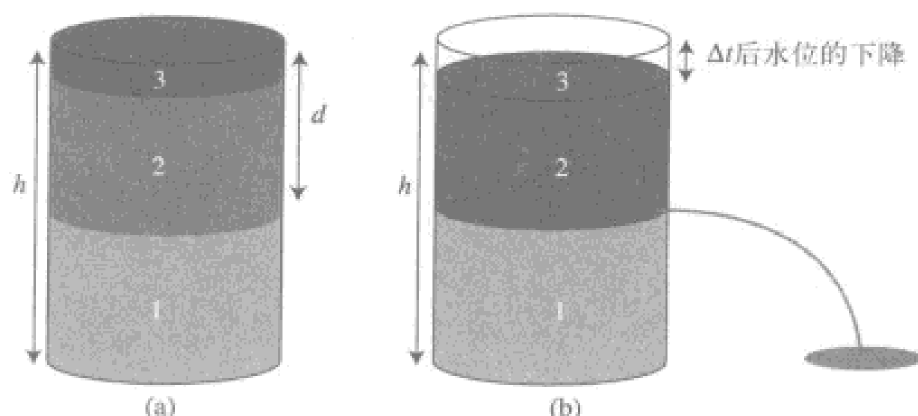


图2 开孔前杯中的水（a）和开孔后Δt时的水（b）

现在考虑图2b，即开孔后某个很小的时间Δt后的情况。仍要记住影响势能的因素是物体的质量和物体离地面的高度。区间1中的水在孔之下，有没有孔它都不会改变，因此，区间1的势能仍然为E_1。区间2和区间3都在孔之上，因为水通过孔流出，两个区间中的一个或两个中的势能必然会发生变化。我们考查区间2中的势能，可以发现它没有变化。区间2中并非原来的水分子（我们想象水从区间2的底部排出了），但流到区间2的水的势能与开孔前这一区间的水的势能是一样的：它们的质量相同，处在同样的高度。因此，图2b所示的杯中的水的总能量是E_1+E_2；区间3已经空了，所以它的质量为零，能量也为零！

为计算E_3的值，我们首先从计算其体积开始。杯的底面积是一定的，令其为A_c[①]。当水从杯中流出时，水面将以一定的速

① c表示杯子，can，后同。——译者注

度下降，令其为v_c。在很小的时间Δt后，水面高度的变化为$v_c\Delta t$。所以，区间3的体积为$A_c v_c \Delta t$。水的质量为体积与密度的乘积，我们令密度为W。这一质量的水曾经在杯顶，开孔后，同样质量的水从孔中流出。两种状态下水面高度的差为d。因此，杯中势能的变化为

$$WA_c v_c \Delta t g d。$$

质量$WA_c v_c \Delta t$与喷出孔的水的质量是相同的，因此，离开孔的水的动能可以表示为

$$\frac{1}{2}WA_c v_c \Delta t v^2。$$

于是，能量守恒方程可以写成

$$\frac{1}{2}WA_c v_c \Delta t v^2 = WA_c v_c \Delta t g d。$$

经过消项后，我们得到

$$\frac{1}{2}v^2 = gd。$$

因此，水出孔的水平速度为$v=\sqrt{2gd}$。令人惊奇的是，它与一个物体从高度d下落到地面时的垂直速度是一样的！

水垂直下落的距离为$h-d$。所以，下落的时间为

$$t_{\text{fall}} = \sqrt{\frac{2(h-d)}{g}}。$$

现在我们就有了足够的条件写出a依赖于变量d的方程：

$$\begin{aligned} a(d) &= v_h t_{\text{fall}} \\ &= \sqrt{2gd}\sqrt{\frac{2(h-d)}{g}} \\ &= 2\sqrt{d(h-d)}。\end{aligned}$$

这一方程可以用来对高度为h的水杯推算关于d的函数a。

方程 $a(d)=2\sqrt{d(h-d)}$ 中平方根下的表达式是和为h的两个值d和$h-d$的几何平均值。这一几何平均的极大值是d和$h-d$的算术平均，即$h/2$。(注意这一极大值只在$d=h-d$即$d=h/2$时才出现。)

因此，当$d=h/2$时，也就是说孔在杯的中部时，距离a达到最大。这一最大距离为

$$a_{max}=2\max\left(\sqrt{d(h-d)}\right)=2(h/2)=h。$$

换句话说，最大距离即是杯高！

奇妙的是，$a(d)$和a_{max}都与杯的直径和孔的大小无关！

现在，我们的问题已解决了。拉维所要做的就是算出液体会从罐中喷出多远。从前面的故事中，我们知道罐高20米，直径10米。当大罐往外抽液时它是满着的。大罐车每分钟抽液3 000升，抽液时间为26分，因此抽出了78 000升。圆柱形罐的半径为5米，因而其底面积为$\pi(5米)^2$，约等于78.5米^2。回忆一下，1毫升的容积能容纳1厘米^3，因此1米^{3}等于(100 厘米)^3，即10^6毫升，它等于1 000升。所以，对78.5米^{2}的截面积，液面降低1 米等于减少78 500升。

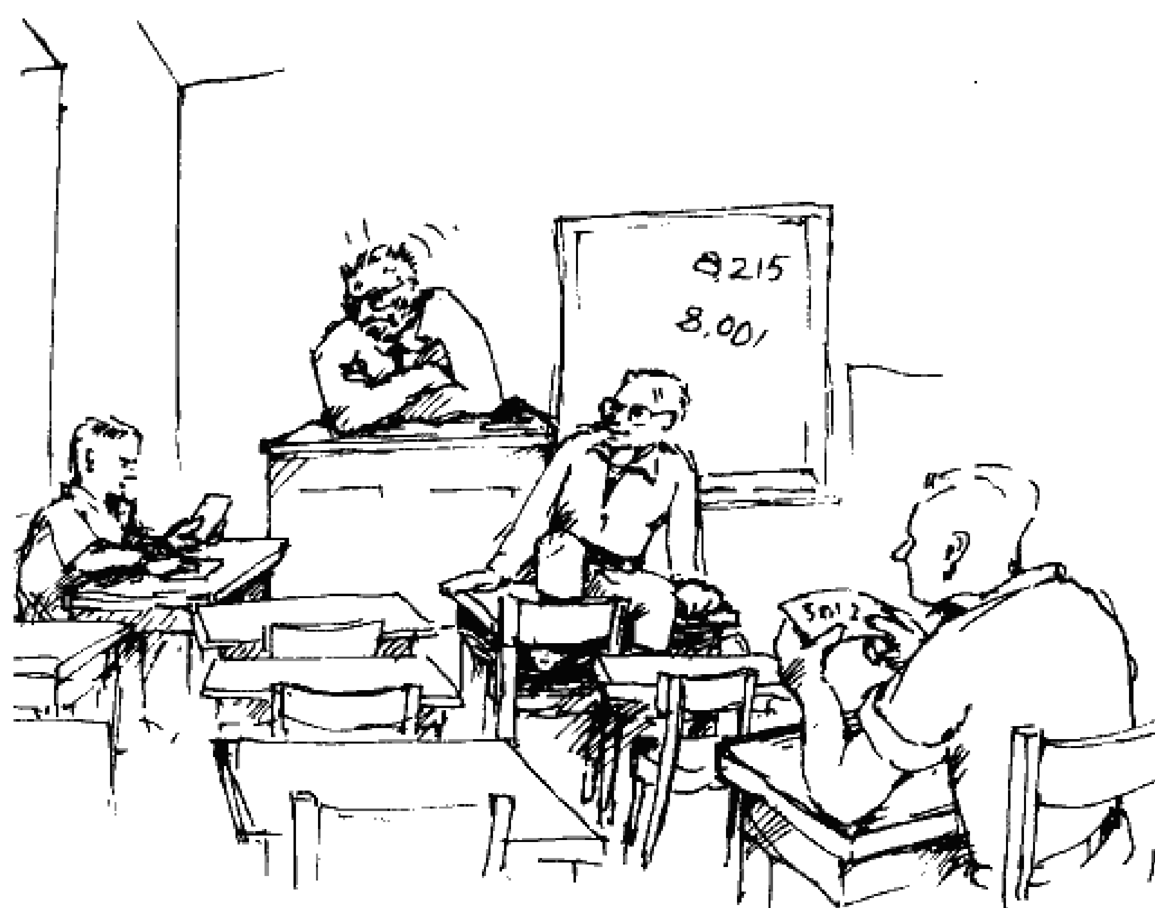
因此，在子弹射出时，罐中的液面已经从20米下降到19 米多。为论述方便，我们就当它为19米。这相当于$h=19$米的杯子。(杯子实际有多高并没关系，只须关注液面的高度。因此如果液面19米高，我们就可以认为杯高为19米。)弹孔距地面9.5米。换句话说，它也在液面以下9.5米，等于方程中的$d=9.5$米。这些正好满足产生最大喷射距离的条件——孔在杯的中

部！所以，液体在触及地面前将喷出等于h的距离，在本案中，就是19米。

然而，斯塔克豪斯的证词说他在罐周围10米的绳圈内巡逻，枪响时他来不及躲开被溅了一身。这在物理上是当然不可能的。（人的高度平均来说低于2米。）

唯一的结论是，他捏造了这个故事。他用自己的枪把罐打了个洞，在把醋酸（40%的浓度只会产生轻微的灼伤）洒在身上后，跑到卡车司机那儿声称被浇了。他的企图就是从尚卡化工厂得到巨额经济赔偿。

拉维亮出自己的证据后，约瑟夫·斯塔克豪斯被逮捕了。液罐被清干，子弹也找到了。弹道分析证明，子弹正是从约瑟夫·斯塔克豪斯上班时携带的枪中射出的。


8,001

“不知道”的冤案

教室的门被突然打开，甚至没说声对不起，丹泽因先生就带着两个十一年级学生艾伦·凯特利和比尔·亨宁斯闯了进来。

“什么事，丹泽因先生？”正上美国历史课的老师谢尔比先生问。他正在上第3节历史课，而且在复习下周将要进行的期末考试的关键内容，就这么被打断使他颇感意外和吃惊。

丹泽因先生也意识到了他闯进谢尔比先生的课堂很鲁莽。他是一名优秀和敬业的数学老师，教预科微积分课。学生们都知道他特好激动——他要激动了，就容易做出冲动的事。

“实在抱歉，谢尔比先生。我本不该打断您。但我遇到了我们必须解决的问题。我能不能借拉维几分钟？不然的话，有些家伙会有大麻烦。”丹泽因先生说道，他盯着艾伦和比尔，重重地吐出了最后三个字。

“哦，这有点不大对劲，但我想拉维确实也用不着再复习了。请便吧，丹泽因先生，只要拉维没意见。”谢尔比先生回答。

拉维从座位上起身，把历史笔记收进书包里，一边走出教室，一边说，“谢谢谢尔比先生。对不起。”

现在丹泽因先生平静了一些，他开始向拉维解释发生的情况。

"对不起，拉维。凯特利先生和亨宁斯先生作弊，我打算送他们到校长办公室，但他们恳求我找找你，说你能证明他们的清白。"

"是怎么回事？"拉维问，露出关切和吃惊的样子。艾伦和比尔都是拉维的好朋友，他们在同一个数学竞赛小组。拉维知道他们的数学都很优秀，他们既不需要，也不希望作弊。艾伦紧张地说，"拉维，我们试着向丹泽因先生解释我们的答……"但丹泽因先生急忙打断了他。

"问题是这样的，拉维，"丹泽因先生说，"上个月，我在预科微积分课上告诉学生，如果他们提出并解出一道真正原创的数学题，就可以不参加期末考试，他们的学期平均分可以作为学期总分。显然，凯特利先生和亨宁斯先生企图通过作弊利用我的好心。"

"他们是如何作弊的呢，丹泽因先生？"拉维问，希望这是个误会。丹泽因先生开始讲述，说着说着他又变得激动起来。

"凯特利先生和亨宁斯先生告诉我，他们设计和解出了一道极好的数学题。我要他们告诉我，他们却说通过演示效果会更好。艾伦到我桌前告诉我一个正整数，要我不说出去。然后比尔也到我桌前告诉我另一个正整数。他们都声称各自独立地想好了数，都不知道对方的数是多少。然后他们让我在黑板上写两个数，一个是他们告诉我的两个整数的和，另一个是我自己随便想的数，两个数没有特定的顺序，也不用我告诉他们谁

是谁。我按他们说的做了。接着比尔转向艾伦问，'你知道我的数吗？'艾伦回答说不知道，然后也问比尔，'你知道我的数吗？'比尔回答说不知道。他们就这样问了几个来回，每个人都重复同样的问题，回答都是不知道对方的数字。接着当艾伦问比尔时，比尔却突然说他知道艾伦的数字，并过来告诉了我艾伦的'秘密'数。"丹泽因先生带着讥讽的口吻讲完了故事。说到"秘密"这个词时，他的手指在空中划出两个引号。

"您认为他们是怎么做的呢，丹泽因先生？"拉维问，似乎在自言自语。

丹泽因先生做着手势回答，"显然，他们在作弊！我认为他们事先一起想好了数，然后演出这种小把戏哗众取宠。但这是荒谬的——如果你不知道对方的数字，一遍一遍地重复你不知道这个数怎么会帮你知道呢？"

"您介意我们回到您的教室做个试验吗，丹泽因先生？"拉维尽量用最平缓的语调问，以缓和丹泽因的情绪。因为丹泽因先生对拉维非常看重，他同意了。众人来到空空的教室。拉维要艾伦和比尔坐在教室的两头。然后，拉维请丹泽因先生想好任一正整数并写在纸上。丹泽因先生写的是 3 862。拉维把纸折好后交给艾伦，说，"这是你的秘密数字，艾伦。"拉维又请丹泽因先生重复上述过程，这回他在另一张纸上写的是 4 139。拉维同样折好纸并走到比尔跟前，作了同样的吩咐。

然后，拉维请丹泽因先生在黑板上写两个数字，一个是他写给艾伦和比尔的两个数的和，一个是他随便想的数，这两个数没有特别的顺序。丹泽因先生走到黑板跟前写下了 8 215 和 8 001 两个数。他写完后就眼瞪着艾伦和比尔大步跨回自己的

桌前，并将双臂交叉在胸前坐在椅子上。

拉维随即转向艾伦问，“那两个数你都知道吗，艾伦？”

“不，不知道。”艾伦答。

拉维接着问比尔：“那两个数你都知道吗，比尔？”

“不，不知道。”比尔答。

就这么来来回回好多次。丹泽因先生越来越相信，因为这回数字是他自己写的，两个小孩没法串通，问题不可能解出，孩子们不过是在垂死挣扎。眼见着丹泽因先生就要起身结束这一猜字游戏，拉维又问，“比尔，你知道那两个数吗？”

“是的，我知道！”比尔大声说，他的表情轻松了许多。他接着不但说出了自己的数字，也说出了艾伦的数字。

丹泽因先生从座位上跳了起来，说，“我看看那两张纸。”他要的是他写在纸上的两个数字。两个男生把纸交给他，结果比尔确实说对了，正是这两个数。

“怎么回事？”丹泽因先生问。“这是什么把戏？你们是这么说的吧？你们说‘不，我不知道’意思是千，而‘不，我不知道’意思是百？是这样吗？你们靠的是语音的变化，我说的不对吗？”丹泽因先生现在已经暴怒了。

“你们要知道，我能从你们的声音中听出来。我只不过没有说出来，就是这么回事，”他几乎尖叫起来，拿食指点着艾伦和比尔晃动着，把两个孩子都吓坏了。

“丹泽因先生……丹泽因先生。”拉维镇静地叫着丹泽因先生，声音越来越重，直到把他的注意力吸引过来。丹泽因先生停止了手势，看着拉维，觉得有些尴尬，他意识到自己刚才又失态了。

“这里面没有骗局，丹泽因先生。这在数学上是合理的。艾伦和比尔确实提出了一道精彩的数学题。请给我几分钟证明给您看。”拉维说着走向黑板。

拉维随后向丹泽因先生演示了艾伦和比尔的“戏法”中的数学知识。你能做到吗?

分析与提示

我们现在就来分析这个问题。数学之美就在于，它能揭示我们容易忽视的东西，能颠覆我们本能地坚信是正确的东西，能向我们展示其背后的微妙与优雅。这里的问题就是一例。

为简单起见，让我们用A指艾伦，用B表示比尔，正规地表述这个问题：

老师交给两名男生A和B各一个正整数，但他们都不知道对方的数。随后老师在黑板上写下两个正整数，并告诉他们其中一个是他们手上的数字的和，另一个是随机选择的数。然后老师问A是否知道B手中的数。如果A不知道，老师又问B同样的问题，一直这么问下去，直到其中一个说出另一个男生手中的数为止。

提示：问题好像很模糊，因为A或B咋就能得到附加的信息想出这两个数呢？关键在于仔细地思考如下疑问：当一个男生说他不知道对方的数字时，是不是隐含了某种额外的信息?

求解

假定A和B手上的两个不同的正整数分别是a和b，老师写

下了两个数M和N，其中一个是a与b的和。我们不妨令$N < M$，并令M和N的差为d。因为我们指定a和b为正整数，故有$0 < a$和$0 < b$。

问题的关键是要认识到随着每个否定回答，系统中的关键信息会逐渐累积起来，每个男生都必须明了这种渐进的累积信息。

我们用A_k表示在B的第k个连续的"否"后A可以得出的结论。同样，B_k就是在A的第k个连续的"否"后B可以得出的结论。

第一次提问后，A回答了"否"。这就给B一些信息，因为他也可以回答"是"的。如果黑板上的较小的那个数小于或等于a，A就应该知道两个数的和不可能是N，因此和应该是M（换句话说，如果$a \geqslant N$则$b = M-a$）。因此，我们有

$$B_1：a < N。$$

如果B接着回答"否"，A就可以推导出有关b的一些信息。首先，根据建立B_1的推理的同样脉络，A得出$b < N$。但是B的"否"是在A的"否"之后，它建立了另外的关键事实：$b > d$。如果B的数小于或等于d，B根据下面的推理应该知道$a + b < M$：

$N + d = M$ （根据d的定义），

$a < N$ （A的第一个"否"后两人都知道的事实B_1），

$b \leqslant d$ （根据假设）。

如果上述命题成立，我们可以把不等式相加得出$a + b < N + d$。这与$a + b < M$相同，因此$a + b$应该等于N。

因为B并没有推出和来，A就知道b一定大于d，于是我们

有

$$A_1: d < b < N。$$

这是现在两人都知道的事实。

如果A的下一个答案也为“否”，B可以推出$a < N-d$。如果$a \geqslant N-d$，A应知道$a + b > N$：

$b > d$　　（两人都知道的事实A_1），

$a \geqslant N-d$　　（根据假设）。

再次相加，我们得到

$$a + b > (N-d) + d = N。$$

于是A就应该知道和必为M。但因为A不知道这个和，B便可得知$a < N-d$。因此，我们有

$$B_2: a < N-d。$$

如果B仍然回答“否”，A可推出$2d<b<N$。否则如果$b \leqslant 2d$，B应该知道$a + b < M$：

$(N-d) + 2d = M$，

$a < N-d$　　（两人都知道的事实B_2），

$b \leqslant 2d$　　（根据假设）。

再次将不等式左右两边相加，得出

$$a + b < (N-d) + 2d = N + d = M。$$

B应该已经知道两个数的和一定是N（因为它不可能是M）。但因为B说的是“否”，A据此得知$b > 2d$，而且我们有

$$A_2: 2d < b < N。$$

如果A的下一个答案仍为“否”，B可以推出$a < N-2d$。如果$a \geqslant N-2d$，则A将能算出哪个数是和：

$b > 2d$　　（两人都知道的事实A_2），

$$a \geqslant N-2d \quad \text{（根据假设）。}$$

将不等式左右两边相加，得出

$$a + b > (N-2d) + 2d = N。$$

A就会知道和必是 M。因为 A 不知道这点，B 就知道上述假设反过来是真的：

$$B_3：a < N-2d。$$

现在我们可以看出其中的规律了。对每个后续的“否”，每个男生都能推出对方的数的新的信息，从而距算出和越来越近。B的推理遵循下述模式：

$$B_k：a < N-(k-1)d。$$

A的推理符合下述模式：

$$A_k：kd < b < N。$$

(这两个通式可用归纳法证明。回忆一下，归纳法的定义在《西克莫里凶杀疑案》中出现过。此处我们把证明留给读者作为练习。)因此，我们发现 a 和 b 的界限随着每个后续的“否”不断变窄。例如，A认识到 b 只有两种可能：$N-a$ 或 $M-a$。于是A等着一个一个推理，消除其中的一种可能，就得到了正确的 b。同时，B 也在用同样的方法推理 a。

最终，其中一个男生将回答“是”，推理过程结束。在每一轮否定回答后 k 递增（以固定速率）。因为我们处理的是有限的正整数，我们一定会到达一个点，在此点如下事件发生：

1. 乘积 kd 达到或超过 b。于是 B 得出结论 $a + b = N$ 并结束游戏。

2. 乘积 $(k-1)d$ 达到或超过 $N-a$。此时 A 将得出结论 $a + b = N + d = M$ 并结束游戏。

如果我们考查一下问题中的实例，上述过程会更清晰。在故事中，$a = 3\ 862$，$b = 4\ 139$。老师在黑板上写下的是8 001和8 215。随后老师（或拉维）开始依次问两个男生是否他们知道那两个数。

两位男生从下述信息开始：

A知道	B知道
$a = 3\ 862$	$b = 4\ 139$
$a + b = 8\ 001$ 或 $a + b = 8\ 215$ 即 $b = 4\ 139$ 或 $b = 4\ 353$	$a + b = 8\ 001$ 或 $a + b = 8\ 215$ 即 $a = 3\ 862$ 或 $a = 4\ 076$
$d = 8\ 215 - 8\ 001 = 214$	

因为A的第一次回答是“否”，B可容易地算出B_1：$a < 8\ 001$。倘若$a \geqslant 8\ 001$，A就应该知道两数的和不可能是8 001，因此和必为8 215，这样他就应该能够通过减法算出b。

接着B回答“否”，A可推出A_1：$214 < b < 8\ 001$。如果B的数小于或等于214，B就会知道$a + b < 8\ 215$（因为两个男生现在都知道$a < 8\ 001$）。所以B就应该已经算出和应该是8 001（同时也能通过减法算出a）。

因为B没有算出和，A知道b一定大于214。B也能像A这样推理，因此他知道A知道这一事实。

如果A的下一个回答是“否”，B可推导出B_2：$a < 7\ 787$（即8 001–214）。倘若a大于或等于7 787，A就应该已做出如下推理：

$b > 214$　　（两人都知道的事实A_1），

$a \geqslant 7\ 787$　　（根据假设），

$a + b > 7\ 787 + 214 = 8\ 001$。

因此，A应该已推导出和必为8 215。但他没有推导出来，所以B知道$a < 7\ 787$，而且A知道B知道这一点。

如果B接着回答“否”，A可推出A_2：$428 < b < 8\ 001$。倘若$b \leqslant 428$（即2×214或$2d$），B就应该算出如下结果：

$$a < 7\ 787,$$

$$b \leqslant 428,$$

$$a + b < 7\ 787 + 428 = 8\ 215。$$

因为B没有推出这一结果，A现在得出结论$b > 428$（且B知道A知道这一点）。

如果A的下一个回答是“否”，B可推导出B_3：$a < 7\ 573$（即$8\ 001 - (2 \times 214)$）。倘若a大于或等于7 573，A就应该知道

$$b > 428,$$

$$a \geqslant 7\ 573,$$

$$a + b > 7\ 573 + 428 = 8\ 001,$$

而且和因此必为8 215。

现在我们可以看出我们熟悉的模式了。对A的每一个后续的“否”，B的推理按如下模式发展：

$$B_k\text{：}a < 8\ 001 - 214(k - 1)。$$

同时，对B的每一个后续的“否”，A的推理遵从模式

$$A_k\text{：}214k < b < 8\ 001。$$

上述过程当$214k \geqslant 4\ 139$且B回答“是”或$214(k-1) \geqslant 4\ 139$（即$214k \geqslant 4\ 353$）且A回答“是”时结束。本例中B在A推出$b$之前算出$a$并回答“是”。我们通过下面的计算验证这一结论：

$214k \geqslant 4\ 139$　　　　$214k \geqslant 4\ 353$

$k \geqslant \frac{4\ 139}{214} = 19.3411 \cdots > 19$　　$k \geqslant \frac{4\ 353}{214} = 20.3411 \cdots > 20$

$214 \times 20 \geqslant 4\ 139$　　　　$214 \times 20 \leqslant 4\ 353$

因此，在B的第20次推理（在A的第20个连续的“否”之后）中，B得出$a < 4\ 066$。他是如下得出这一结论的：

$$a = 3\ 862 \quad 或 \quad a = 4\ 076,$$

$$B_{20}: a < 8\ 001 - 214\,(20 - 1) = 4\ 066,$$

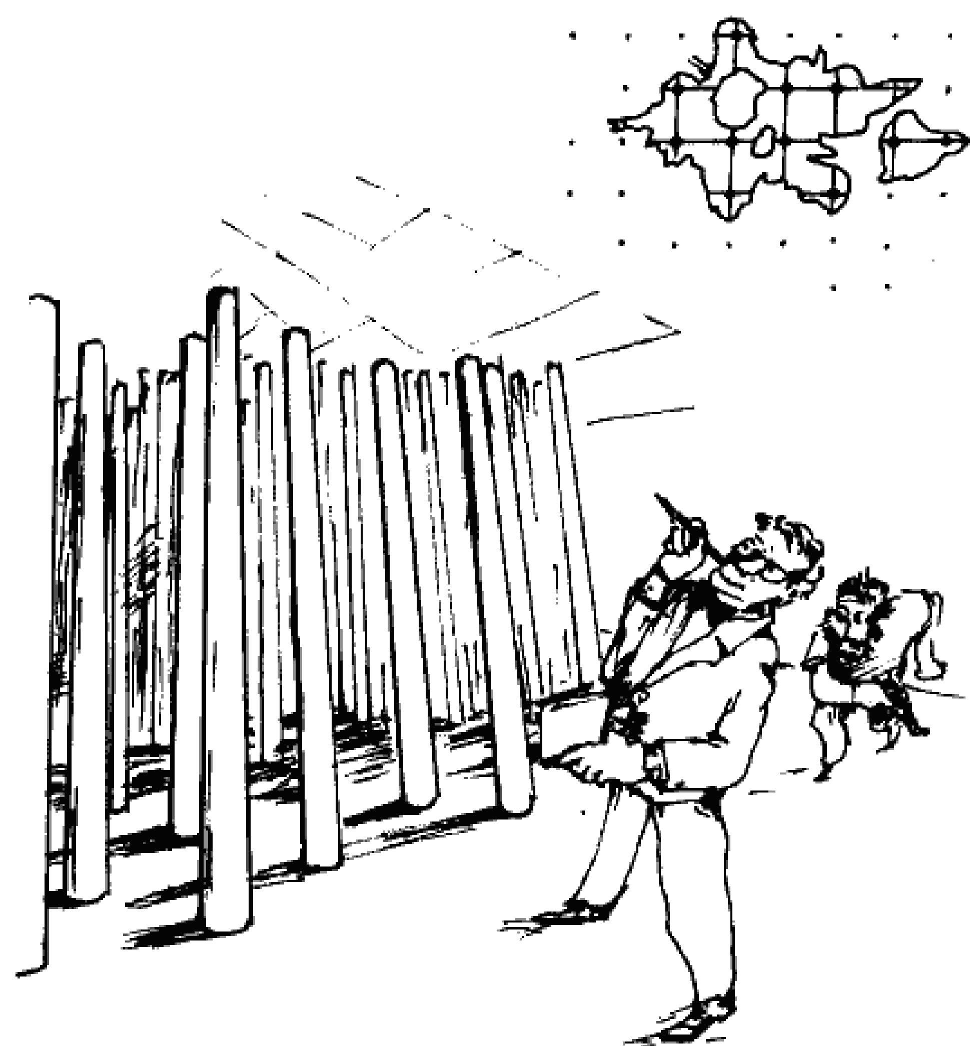
$$a \neq 4\ 076 > 4\ 066。$$

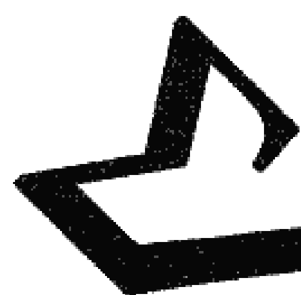
根据这最后一个推导，B终于知道4 076在a的可能值限度之上，因此a必为3 862。

在结束本次费力的旅行之前，让我们搞清楚为什么A没能给出答案。当$k = 19$时，A和B都说了19次“否”，且A能够推出

$$A_{19}: 214 \times 19 < b < 8\ 001，即 4\ 066 < b < 8\ 001。$$

现在A已经知道$a = 3\ 862$。因此b的两个可能值是$8\ 001 - 3\ 862 = 4\ 139$和$8\ 215 - 3\ 862 = 4\ 353$。我们发现，这两个可能值都落在A目前所能推导出的范围之内：$4\ 066 < 4\ 139 < 4\ 353 < 8\ 001$。所以，A还不能分辨这两个值中的哪一个是$b$。





城市丛林枪击案

“好啦，拉维。”拉维的母亲试着安慰显然有些失望的儿子。几周来，拉维一直盼望着芝加哥艺术学院的现代艺术展的开幕。在展览会上，著名艺术家戴维·梅尔比将展示他的最新互动艺术杰作：《城市丛林》。拉维在《现代艺术文摘》曾读到一篇文章，其中介绍了梅尔比对美丽大自然的热爱和大自然被城市不断吞噬的忧伤。梅尔比的作品意在突出他对现代城市的鄙弃，他认为现代城市是贫瘠与乏味的，那种以为在混凝土的丛林中留出几块公园和人工草坪就保留了些许自然之美的想法，不过是自欺欺人。

作品的设计出奇地简单，但一旦置身其中，你就很可能会受到巨大的冲击。描述作品的最佳方式是想象地面上的一幅网格，就像一张大方格纸一样，只不过这些格子实际上并没有在地面画出来。在被称为0号区的中央，是一片光滑的圆形混凝土，直径1英尺。整个展览为一片大的圆形“森林”，直径为200英尺，0号区正处在其中心。“森林”由现代之“树”构成，每棵“树”均为直径1英寸、高10英尺的光滑木棒。这些木棒沿着假想的格点两两精确相距2英尺（见图1）。各行各列间两英尺的走道足够人们在其中穿行，并体验这种光秃秃的木棒阵，

与郁郁葱葱的森林相比，它给人留下的似乎看不到尽头的荒凉景象。在梅尔比的思想里，这种“城市丛林”与实际的森林的对比，正是人工美与大自然之美的对比。

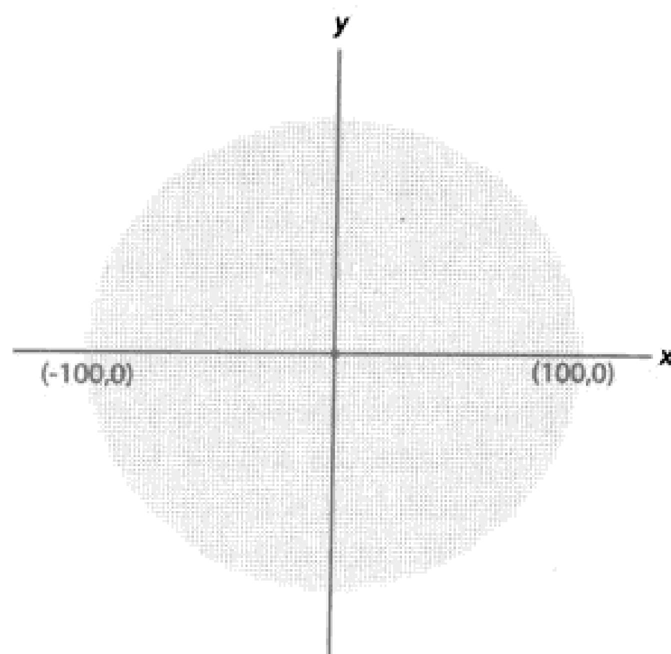


图1 城市丛林的鸟瞰图

拉维的母亲生来具有艺术审美力，并把这种艺术细胞遗传给了她儿子。尽管对许多人来说，数学和艺术是无法相联系的，但拉维却看到了两者之间的密切关系：两者都需要敏锐的审美意识。本来拉维和母亲已计划好今天参加城市丛林展览的开幕式，但一大早，拉维在芝加哥做地方检察官的爸爸就从办公室打来电话说，展览会关闭了，因为现场发生了命案。

当天吃晚饭时，拉维的父亲给家人讲了案件令人震惊的情景。清晨，在展览就要开始前，在城市丛林的东边边缘有人行凶，枪杀了正在观看展览的《芝加哥先驱报》著名艺术评论家史蒂文·詹宁斯。现在警察逮捕了开枪的梅尔比，目击者是另

一位艺术家西蒙·沙利文，他也有作品参加今早要开幕的展览，他的作品名为《铃声与哨声》。

“这太令人失望了，爸爸，”拉维说，“这哪里是我在《现代艺术文摘》上读到的梅尔比。”

“好啦，拉维，人们有时会欺骗你。如果从这件事能学到点什么的话，那就是不是所有的人都是可信任的。他们表面上是一个人，内心里又是另一个人。”拉维的父亲应道。

“但我仍然很难相信。”拉维伤心地说。

“可是证据很难令人不相信，拉维，它容不得人们凭主观判断。我们有可靠的证人看到梅尔比扣动了扳机。”拉维的父亲说，完全一副地方检察官的口吻。

“还有，爸爸，动机呢？梅尔比为什么要杀害詹宁斯？”拉维问道。

“按沙利文的说法，詹宁斯打算就梅尔比的作品为《芝加哥先驱报》写一篇非常犀利的评论，他称《城市丛林》为缺乏艺术价值的粗糙之作。这当然算得上动机。”他父亲回答。

“梅尔比承认谋杀了吗？”拉维问。

“没有，拉维，他们这样的人很少会承认的。他声称听到枪响时他正在城市丛林的另一端。他说他沿着展品跑过来时发现詹宁斯倒在血泊中，身旁有一只枪。梅尔比声称，他只是凭着本能不假思索地拾起了枪。正在此时一些人也赶到了现场，看到了他手里拿着枪站在詹宁斯身旁。”拉维的父亲回答。

“还有其他人看到他扣动扳机了吗，爸爸？确实，展品周围一定还有其他人。”拉维问。

“没有，拉维。当时是早晨6点40左右，周围人很少。那些

听到枪响的人赶过来看见梅尔比站在尸体旁，我刚才已说了。但只有沙利文一个人看到他扣动了扳机。”他父亲解释道。

拉维眼睛盯着墙角沉默了一会儿。最后，他起身去自己的房间。当他就要离开餐厅时，他转向父亲问：“爸爸，沙利文看到这一切时在哪里？有别人看到沙利文了吗？”

他父亲回答：“没有，拉维，没有别人看见他。他们的注意力当然是在面前垂死的詹宁斯身上。不过，沙利文告诉警察他走到‘城市丛林’里面体验，正站在展品中央的‘零号区’。他说听到了剧烈的争吵，当他朝争吵的方向看过去时，正好看见梅尔比掏出枪朝詹宁斯射击。”

“谢谢爸爸。”拉维说着走出餐厅。

“这个拉维！他有时太相信别人了。”拉维的父亲说，他转向拉维的母亲，伸手要了一片馅饼。还没等他把馅饼放进碟子里，拉维又回到了餐厅。

“爸爸，不要控告梅尔比。沙利文在撒谎，我可以证明！”拉维大声说。

分析

我们面前的问题是：拉维怎么知道沙利文是个说谎者？自然，是因为沙利文的证词在数学上是不可能的——从“城市丛林”的中央，他是看不到其周边的。假设有一片半径50个单位的圆形“森林”，其构造就像“城市丛林”一样，其中的“树”位于除原点的每个格点上。这些“树”又是由同样细的垂直圆柱体构成，其半径均为r，相互间隔1个单位的距离。结论是如果这些圆柱体的半径超过1个单位长的1/50，则站在圆形森林中

央的人不可能看到森林的外面，不管他朝哪个方向看。你能像拉维一样证明这一结论吗？

求解

这个问题的求解可能是本书所有问题中最复杂的一个（但是，矛盾的是，求解过程基本上用不到数学方程）。求解的复杂不是因为用到的数学知识难，而是因为用到的数学知识深。这是什么意思呢？它的意思是，求解过程要用到很多步骤，每一步骤都直接建立在其前一步之上。对这样的解答，既要求努力地跟上每一步，更需要努力弄清每两步之间的联系。

在开始我们的跋涉之前，我们先证明一条几何定理，称为布利希费尔特引理（Blichfeldt's Lemma）。假定我们有一张方格纸，被网格线划分成1个平方单位的方格。如果我们在纸上画一块（有界）区域A，其面积大于n个平方单位，布利希费尔特引理表明，总是可能把这块区域平移（即横向或纵向移动而不旋转）使其包含$n+1$个格点。例如，如果我们画出10.2个平方单位的任意区域A，则它通过平移一定能覆盖11个格点（见图2）。

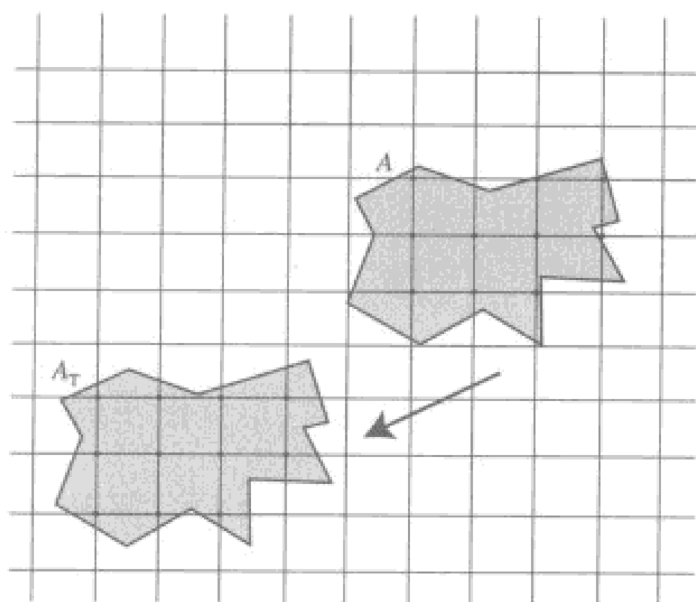


图2 A区覆盖10个格点，可转换成覆盖11个格点

我们可以通过下面的方法证明布利希费尔特引理。假定将方格纸的区域A涂成灰色，而其他区域均为白色。现在，将方格纸上包含区域A的部分沿横向和纵向格线分割成单位方格。结果将产生m个单位方格，且$m > n$，因为A的面积比n大。在我们的例子中，这些单位方格中有些完全是灰色的，而有些则只有部分是灰色的，因为它们并非整个包含在区域内（见图3a）。如此这般之后，我们想象把这些方格在远处的方格S上保持方向不变地摞在一起，举例来说，这意味着我们分割下的每个方格的左下角都与S的左下角摞在一起。这可以通过平移（横向和纵向滑动但不转动）每个分割的方格到S上实现。现在，方格S上面摞上了m个单位方格，且这些方格上的灰色区域的面积之和等于区域A的面积。

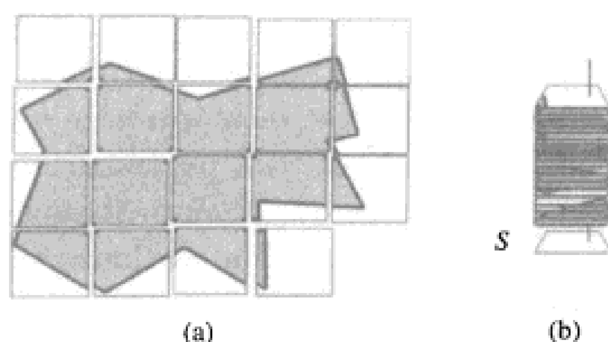


图3 (a) 区域 A 被方格线分割；(b) 分割的方格摞在 S 上

接着，考虑最底部的方格 S，它上面摞着 m 个单位方格。想象从方格 S 上的无穷个点上的每一点发出一条垂直射线，它穿透 S 上摞着的 m 层方格中的每一个对应点，当它穿过每一层时，要么穿过的是白点，要么穿过的是灰点（见图3b）。如果没有一条射线穿过超过 n 个灰点，则 S 上的每个点对应着至多 n 个灰点，这就意味着区域 A 的面积不可能大于 n。所以，必有一条（或多条）射线一定穿过至少 $n+1$ 个灰点，我们把它叫作射线 r。现在我们在射线 r 的位置用一根无穷细的针把 m 层方格扎透，则在 m 个方格上相对于左下角格点的同样位置都做上了记号（扎了个孔）。

现在，我们取下 m 个方格恢复成区域 A，则每个方格上都有一个针孔，它们相对于该方格左下角的位置都是相同的。我们知道至少 $n+1$ 个这样的针孔穿过的是灰点，剩下所要做的只是平移 A 直到这些针孔之一覆盖在一个格点上。由于每个方格上的针孔的相对位置都是相同的，因此可以让每个针孔都落在一个格点上。因为至少 $n+1$ 个针孔穿过的是灰点，区域 A 便通过平移覆盖了 $n+1$ 个格点，所以布利希费尔特引理得证。

现在让我们推导出布利希费尔特引理当 $n=1$ 时的一个推

论：

对面积大于1的区域A，其上必有两个点P_1和P_2，它们横向和纵向距离都是整数，换句话说，如果P_1的坐标是(x_1, y_1)，P_2的坐标是(x_2, y_2)，则(x_2-x_1)和(y_2-y_1)都是整数。

这利用布利希费尔特引理很容易证明。如果区域A的面积大于1，则我们知道它可通过平移覆盖至少两个格点（见图4）。我们实施这样的平移，并像上面一样命这两个格点为P_1和P_2。因为它们都是格点，我们知道值x_1，y_1，x_2，y_2都是整数，因此(x_2-x_1)和(y_2-y_1)也都是整数。接着我们反过来再把这两个点平移到原区域A。由于我们对两个点用的是同样的平移方法，它们的纵向和横向距离并没变化。因此，我们在区域A标识了两个点，它们的横向和纵向距离都是整数。

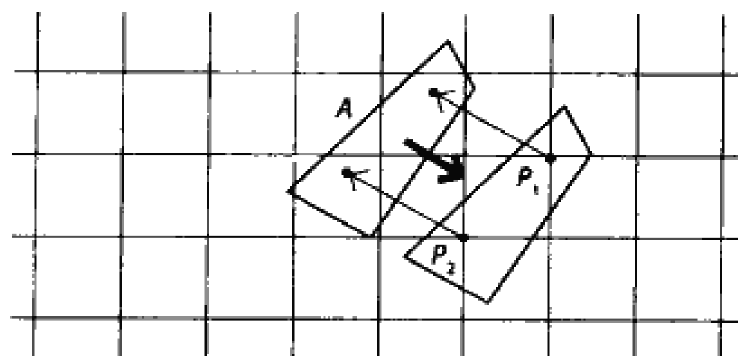


图4 推论证明的形象表示

上述工作都是为了证明下面的闵可夫斯基定理：

一个面积大于4的关于原点对称的凸平面区域必覆盖除原点之外的一个格点。

在上述定理中，凸的意思是如果我们将区域内任意两点用

直线段相连，该线段总在该区域内，例如圆形和方形都是凸区域。术语“关于原点对称”就像我们直观认为的那样，给个形式化的定义就是，如果一个区域包含点P，其坐标为(x, y)，则它也包含点P'，其坐标为$(-x,-y)$。因此，闵可夫斯基定理实际上蕴含着，一个面积大于4的关于原点对称的凸平面区域必覆盖两个格点，其中一个我们标为P_1，坐标为(x_1, y_1)，这里x_1和y_1是整数，因为P_1是格点，而另一个是它的镜像格点P'_1，坐标为$(-x_1, -y_1)$。这之所以正确，是因为该区域是关于原点对称的。

为了证明闵可夫斯基定理，让我们从面积大于4的关于原点对称的凸平面区域A（见图5）着手。我们从各个方向将该区域缩小一半。这在数学上称为按因子1/2伸缩。这一过程又跟我们直观的感觉是一样的。我们取该区域内的每一点，并沿着连接该点与原点的直线向原点移动，把它放到距原点距离为原来一半的位置。用术语来说，就是对每一点(x, y)，我们把它变换

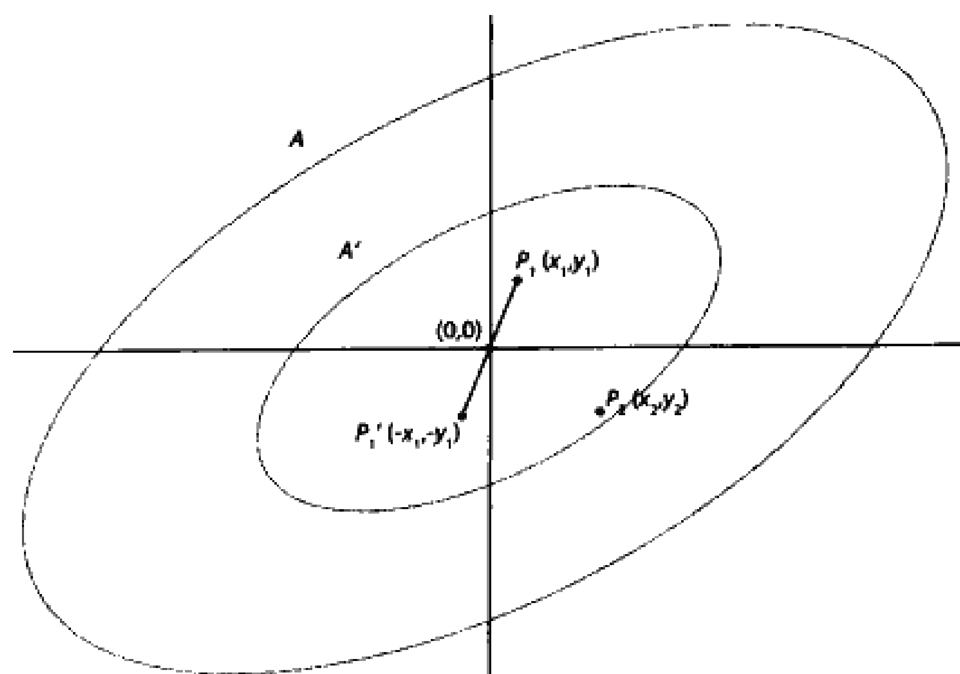


图5 区域A面积大于4，将它在各个方向上缩小1/2

成$(x/2, y/2)$。这一过程精确地保持了区域的形状，而仅仅是将它按线性尺度缩小了一半，这等同于将区域A放在复印机上按50%的缩放率复印了一份。

因为我们按线性尺度将该区域缩小了一半，我们知道其面积现在变为原来的1/4。又因区域A原来的面积大于4，所以新的区域（我们称之为A'）的面积大于1。根据布利希费尔特引理的推论，我们知道它包含两点$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，其横向距离(x_2-x_1)和纵向距离(y_2-y_1)为整数。现在，由于A'包含点P_1，它也包含点$P'_1(-x_1, -y_1)$，这是因为A'关于原点对称。如果画一条直线段连接P'_1和P_2，这条线也是A'的一部分，因为A'是凸的。

现在看连接P'_1和P_2的线段的中点（见图6），回忆一下，连接平面上两个点的线段的中点坐标分别为这两个点的横坐标和纵坐标的平均值，因此P'_1和P_2的中点M的坐标为

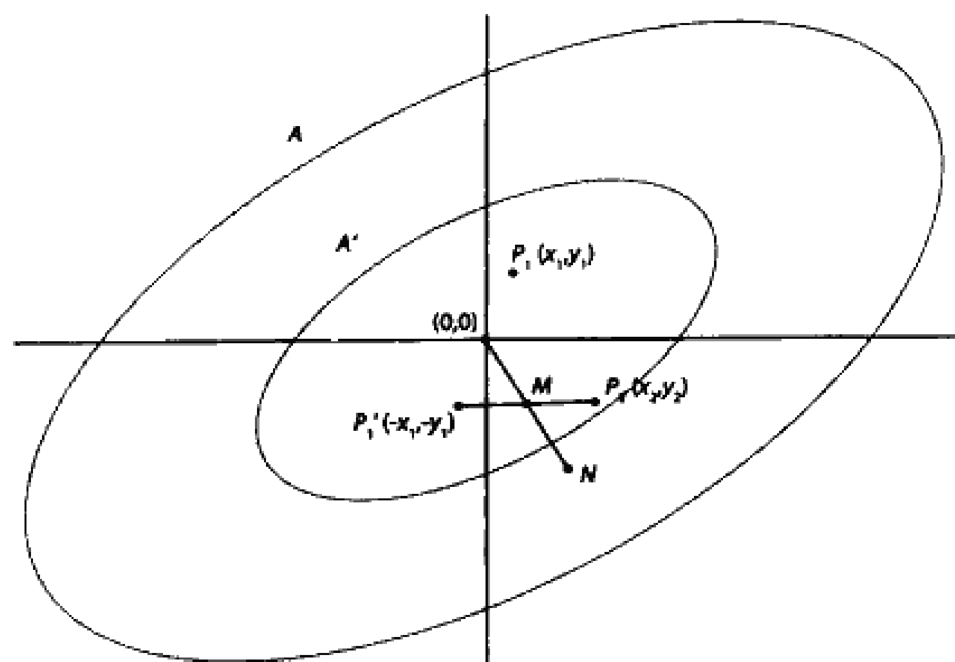


图6 P_1'和P_2的中点M和$N = 2 \times M$均在区域A内

$$\left(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2}\right)。$$

因为A'是凸的，P'_1和P_2间的线段都在A'上，故M也在A'上。

现在我们重新把A'伸缩，将它放大1倍，就回到原来的区域A。点M因而移到新的点N，其坐标为(x_2-x_1)和(y_2-y_1)。根据布利希费尔特引理的推论，我们已经知道这些坐标为整数——它们表示的是两个特定点P_1和P_2间的横向距离和纵向距离。因此，点N是包含在A中的一个格点。因为A关于原点是对称的，格点N关于原点的镜像也是一个格点且包含在A中。于是，闵可夫斯基定理得证。

现在我们已经为解决最初的问题做足了准备。但在求解之前，我们还是简短地从概念上总结一下前面用到的步骤：

1. 我们证明了布利希费尔特引理，即面积大于n个单位的平面区域A可通过平移覆盖$n+1$个格点。

2. 利用值$n=1$，我们推导了布利希费尔特引理的一个推论，即面积大于1的平面区域A内存在两个点$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，其横坐标之差(x_2-x_1)及纵坐标之差(y_2-y_1)都是整数。

3. 运用上述推论，我们证明了闵可夫斯基定理，即面积大于4且关于原点对称的凸平面区域包含原点之外的格点N。因为此区域是关于原点对称的，它也包含N的镜像格点N'。

至此，我们终于可以着手处理城市丛林的问题了。我们要证明，如果坐落在间隔1个单位的格点上的树的半径大于1个单位的1/50，则在原点是不可能看到圆形丛林（其直径为100个单位）的外面的。

让我们从原点（圆心）开始，由此向半径为R的圆形丛林

外周上的任意一点P望去（见图7）。我们将P相对于原点的镜像点标为Q。（注意Q也在圆周上。）线段PQ通过原点，代表了圆形丛林的任意直径。我们画一条与PQ垂直且长为4 × (1/50) = 2/25的弦BC。（于是，从点B到线段PQ的距离为1/25，C也如此。）同样，我们令B和C相对于原点的镜像点分别为D和E。注意DE的长度也是2/25，而且因为BC和DE互为镜像，它们是平行的。

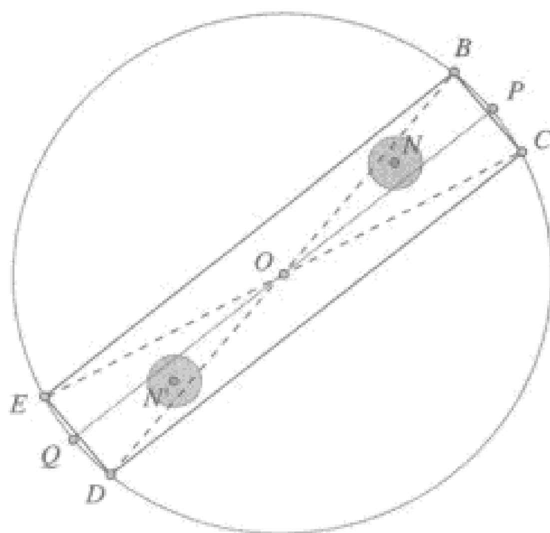


图7 从原点向丛林之外看

长方形$BCDE$完全包含在圆周以内。之所以说$BCDE$为长方形，是因为对角线BD和CE长度相等（它们均为圆的直径）且相互等分（它们在各自的中点，也即圆心相交）。因此角BCD是一个直角，CD的长度l可以通过勾股定理计算出来：

$$(2R)^2=(2/25)^2+l^2,$$

$$l=\sqrt{(2R)^2-(2/25)^2}\text{。}$$

长方形$BCDE$的面积为

$$(2/25)l=(2/25)\sqrt{(2R)^2-(2/25)^2}$$
$$=(2/25)\sqrt{4(R^2-(1/25)^2)}=(4/25)\sqrt{R^2-(1/25)^2}\text{。}$$

我们知道$2R=100$，因而可以证明长方形的面积大于4：

$$(2/25)l=(4/25)\sqrt{R^2-(1/25)^2}$$
$$>(4/25)\sqrt{(R-1/25)(R-1/25)}=4/25(R-1/25)$$
$$>(4/25)(50-1/25)=4(2-(1/25)^2)>4\text{。}$$

根据闵可夫斯基定理，$BCDE$ 包含两个镜像格点 N 和 N'。两个格点上各有一棵树以它为中心。因为树的半径 r 大于1/50，其直径大于长方形 $BCDE$ 宽度的一半。这意味着在 N 点的树切断了从原点到 P 点的视线。同理，在 N' 点的树也切断了向 Q 方向的视线。因为 P 是圆周上的任意一点，同样的结论对圆周上的所有点都是成立的，也就是说，人们从原点向外任意方向看都是如此。这就证明了我们的论点，即站在原点是不可能看到圆形丛林之外的。

在我们的问题中，丛林半径为 100 英尺，树在相距 2 英尺的格点上。我们把 2 英尺当成 1 个单位，则丛林半径为 50 个单位，树所在格点相距 1 个单位。每棵树为直径1英寸即半径 1/2 英寸的圆柱。已知1单位=2英尺=24英寸，因而每棵树的半径为1个单位的1/48，比1/50稍大。因此，拉维认识到西蒙 · 沙利文站在“零号区”是不可能看到丛林之外的，这与沙利文向警察说的直接冲突。拉维的证据促使警察仔细查看了詹宁斯电脑里的文件。事实上，詹宁斯要发表的是对沙利文的作品《铃声和哨声》的尖锐批评，而他对梅尔比的《城市丛林》给予的是毫无保留的赞扬。

拓展

有趣的是，案件经常会通过精确的分析出现转机。沙利文说，他在零号区看到丛林的东面边界发生了谋杀。但问题是那些树稍微粗了点，使他无法自圆其说。正如我们上文看到的，只要树的直径大于0.96英寸（即只要半径大于2英尺的1/50），就不可能看到丛林之外。事实是，梅尔比的树的直径精确地等于1英寸。

现在，我们将证明，如果树的半径比1个单位的1/50小那么一点点，准确地说，为$\frac{1}{\sqrt{2\,501}}$，则只要方向正确，是可能看到丛林之外的。这一方向即从原点到格点$Q(50, 1)$的直线。这一视线与x轴的夹角非常小，但观察者仍可看到发生在丛林东面边界的事件，正如沙利文所说的那样。

我们看看图8，为了帮助我们直观地分析，我们把图作了夸张。线段OQ的长度为

$$\sqrt{2\,501}=\left(\sqrt{1^2+50^2}\right)。$$

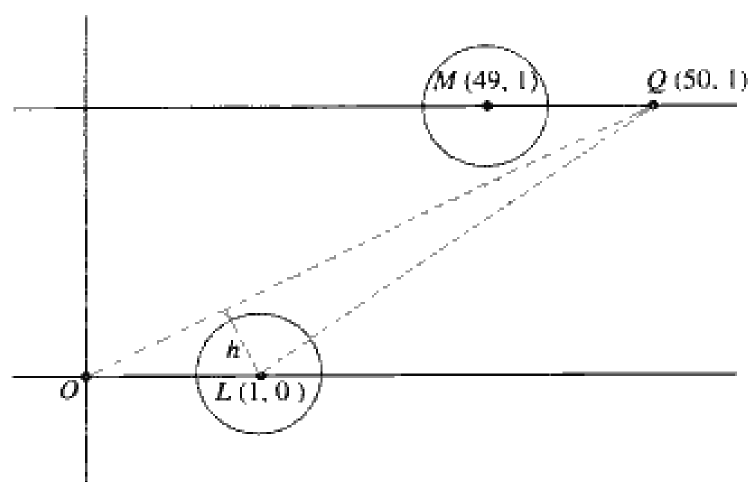


图8　如何看到丛林之外

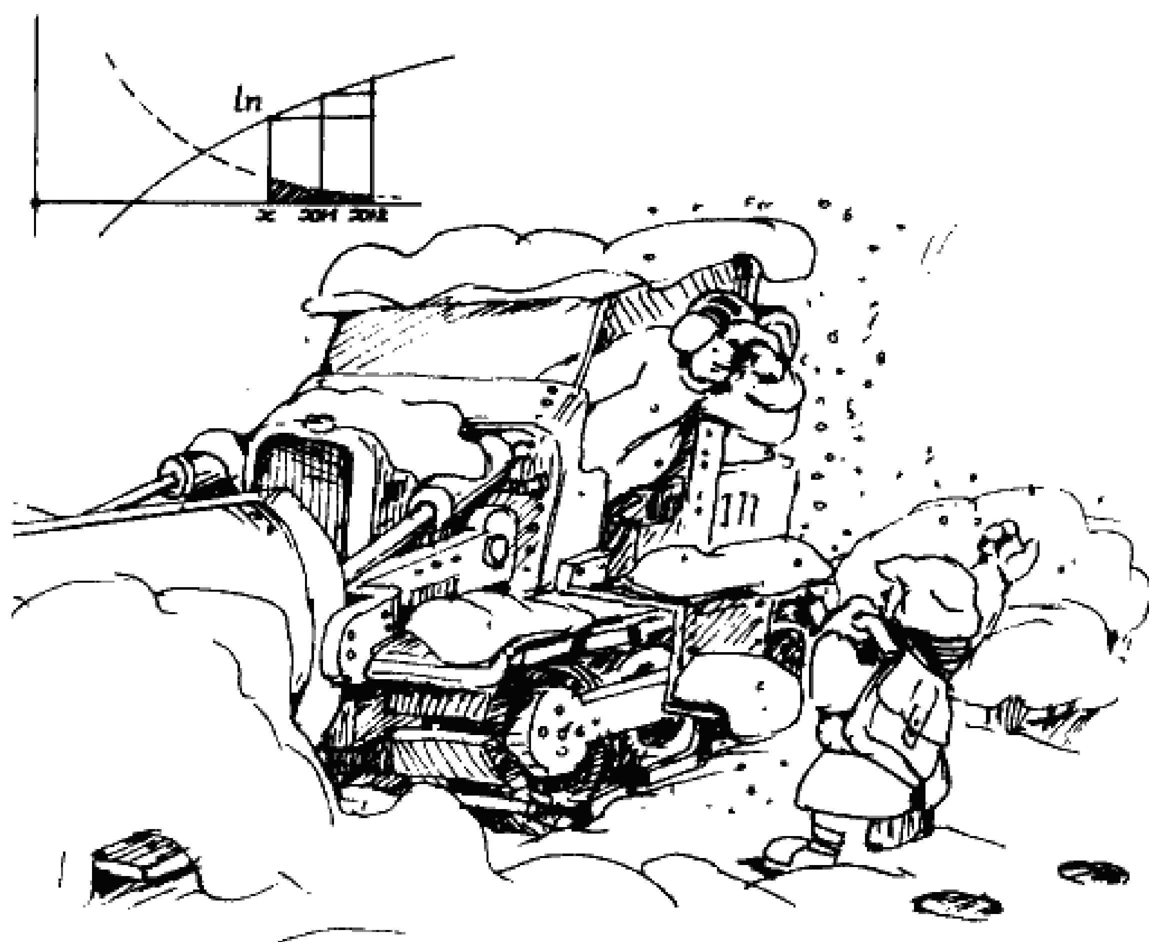
容易看出，距此线段最近的两个格点是$L(1, 0)$和$M(49, 1)$，它们关于线段OQ是对称的。如果在这两个格点的树不能遮挡沿着OQ的视线，其他树则更不能。点O、L和Q构成三角形ΔOLQ。我们用两种方法计算这一三角形的面积：

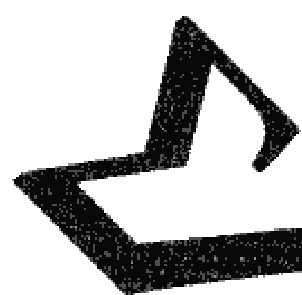
1. 如果以OL为底，则ΔOLQ的面积为$1/2 \times 1 \times 1 = 1/2$。

2. 现在我们以OQ为底，以从L到OQ的垂线为高h，则得到ΔOLQ的面积$1/2 \times OQ \times h = 1/2$。已知$OQ = \sqrt{2\,501}$，所以有

$$\frac{1}{h}\sqrt{2\,501} = \frac{1}{2}，即 h = \frac{1}{\sqrt{2\,501}}。$$

因此，如果树的直径$r < \frac{1}{\sqrt{2\,501}}$，则它太细，阻挡不了视线$OQ$，也就挡不住沿着此视线的视野。假定我们的单位长度是2英尺=24英寸，则r的这一上限为$\frac{1}{\sqrt{2\,501}} \times 24$，它相当于0.959 8英寸的直径。所以说，如果树的直径比此值小，比如为0.95英寸而不是1英寸，则沙利文告诉警察的故事就完全可以自圆其说，也就不可能被拉维识破了。由此看来，本案还真得益于精确分析啊。


ln



珠宝失窃案

芝加哥郊区的橡树街已经被厚厚的积雪掩盖了，这是拉维一家居住的地方。在芝加哥的历史上，这场雪来势之猛是罕见的。拂晓前，它好像从天上倾倒下来一样，以气象学家所谓的最大降雪率疯狂地肆虐，丝毫不见减弱的迹象。

拉维走到车道边往街上望去，满脸的惊奇。雪片就像一块块棉花糖一样从空中飘落，几英尺远的目标都无法看清。拉维裹紧大衣，扯下帽檐盖住耳朵，肩背书包等着父亲驾车送自己上学校。现在是早上8点，他今天是没法走着上学了。就在他在道边站着时，他听到一阵铿铿的声音，透过雪花，一辆庞大的扫雪车沿着橡树街缓缓地驶了过来，一边把积雪铲向路边。司机伯特·麦吉利卡迪看到拉维家的车道，便停了下来，把戴着手套的手架在眉毛上张望，并大声喊道，“嗨，拉维，是你吗？”尽管拉维就在几英尺远的地方，但能见度实在太低，麦吉利卡迪先生拿不准是否就是拉维。

“你好，麦吉利卡迪先生。”拉维盖过扫雪车发动机的轰鸣声喊道。拉维是个很随和的人，性格开朗，讨人喜欢，所以尽管他很有才华，家庭很富有，但他和不同阶层的人都能容易地处上朋友。他的朋友中有公交司机、邮递员、屠夫、博物馆门

卫，也有今天遇到的扫雪车司机麦吉利卡迪先生。

“瞧瞧今天这鬼天气。” 麦吉利卡迪先生喊道。

“不可思议！我从来没见过这么大的雪。”拉维回答。

“是啊，我简直不相信雪会下得这么快，” 麦吉利卡迪先生说。“这两个小时我一直在开足马力铲雪。在6点到7点间，我从滨河路到锐景大道铲了4个街区，而最近的1个小时，却只干了两个街区，是从锐景大道到你这里。”麦吉利卡迪先生继续说。

拉维正要答话，却听到了汽车喇叭声。他转过身去，看到父亲已把车从库里倒出来等着他上车。拉维对麦吉利卡迪先生大声喊道，“对不起，麦吉利卡迪先生，我爸爸在等我。咱们以后再聊。祝您今天好运！”拉维转身跑向汽车。

当晚，一家人边吃饭，边看着新闻。因为这场雪，机场中午就关闭了，芝加哥联合学区发布公告，说明天还要下大雪，所有学校停课一天。

“我看这样的天气，什么事都会停下来。”拉维的妈妈说。

“但犯罪除外。”地方检察官、拉维的爸爸回答。

“为什么，今天怎么啦？”拉维问，他对爸爸的疑难案件有着浓郁的兴趣。

“市中心的泰珀珠宝店被盗了。有人在保险箱门四周钻孔放上炸药，将门炸开了。手法很老道。”拉维的父亲说。

“是的，爸爸。要做到这样，炸药的安放要很精准。我想不会有多少人晓得这么做。”拉维说，现在这个案子更激起了他的兴趣。

“你说得太对了，拉维。在这个国家，我敢说只有吉米·

皮克尔斯·格拉齐亚诺和金玄春能做到，而金正在监狱里。”拉维的父亲应道。

“那么问题出在哪儿呢，爸爸？你们为什么不逮捕皮克尔斯呢？”拉维问。

“事情没那么简单，拉维。我高度怀疑他，法官塞巴斯蒂安也是这么认为的。但我们连取得搜查证的证据都不够，更不用说逮捕他了。我们能做的只是讯问他。泰珀的保险箱的报警系统在凌晨4:53被毁坏。皮克尔斯有早晨5:30开始不在现场的证据——费希尔老太太在他住的公寓外看见他了。费希尔太太要出去遛狗，她说就是下那么大的雪，她也能在路灯下认出他，他在公寓大门口。”拉维的父亲回答。

“格拉齐亚诺的公寓离泰珀珠宝店有多远，爸爸？”拉维问。

“我们已经考虑到这点了，拉维。不堵车的话，大约25分钟的车程。但在这样的雪天，能见度这么差，皮克尔斯要在5:30前从泰珀珠宝店赶回公寓是绝对不可能的，要是他就是犯人的话。”拉维的父亲解释道。

“你们要取得搜查证要满足什么条件，爸爸？”拉维问。

“塞巴斯蒂安法官需要的只是一个理由，拉维。只要有皮克尔斯是罪犯的可能性就够了。我们确信就是他干的。”拉维的父亲说，他摇摇头，担心罪犯可能会逃避制裁。

“还记得今天早上的事吗，爸爸？我在和麦吉利卡迪先生说话时，您按喇叭叫我。根据他所说的话，我想我有足够的理由帮您弄到搜查证！”拉维开心地笑起来。

拉维是什么意思？从我们所知情节看，他怎么能发现皮克尔斯犯罪的可能性呢？

提示：从已知信息看，拉维可以计算出什么时候开始下雪，而皮克尔斯有时间洗劫保险箱并差不多在下雪前逃回家。如果你做出一些合理假设，你能算出来吗？

分析

从我们已知的细节看，我们实际上可以归纳出一个很好的数学问题，我们可以用下面的语言描述：

早晨6点前某个时刻，大雪开始以稳定的速度下落。在6点时，一辆扫雪车开始清除街上的积雪。扫雪车每单位时间清除积雪的体积是固定的。在第1个小时，扫雪车前进了某一距离（根据麦吉利卡迪先生的说法，就是4个街区）。在第2个小时，扫雪车只前进了该距离的一半。雪是什么时候开始下的呢？

求解

因为扫雪车每单位时间清除的积雪的体积是固定的，所以对固定宽度的街道，扫雪车沿着街道的直线速度与地面上积雪的厚度成反比。现在，我们将会用到一些变量，它们决定了扫雪车的速度，但最终都会被消去。

我们假定雪从 $t = 0$时刻开始下。我们知道雪下的速度是一定的（也就是说，是常数），因此可令此速度为 s，并表示为单位时间内增加的厚度单位，于是，雪在时刻t的厚度是 st 个单位。而扫雪车在时刻 t 的速度便与 $1/st$ 成正比，不妨令其为 $k(1/st)$，

这一表达式等价于 $(k/s)(1/t)$。现在，我们假设扫雪车在时刻 $t=x$开始清扫橡树街。

我们知道，一般来说，$d=vt$，其中 d 表示距离，v 是速度，t是时间。因此，扫雪车在某个时间段t前进的距离为vt。但这一方程只有在假设时间段 t 内速度 v 是常数的情况下才成立。本案中，这一假设显然是不正确的，因为雪下得很大，雪的厚度是在不断增加的，因而扫雪车的速度是逐渐减小的。遇到这样的情况，就要用到微积分了。这里我们使用方程 $v(t)$ 从时刻 x 到某个时刻 T 的积分计算扫雪车前进的距离 d，$v(t)$表示扫雪车在任意时刻t时的速度。

$$d=\int_x^T v(t)\mathrm{d}t \text{。}$$

如果你不熟悉积分，上述表达式可以理解为一些距离 $d=v(t)\mathrm{d}t$ 的和，其中 $\mathrm{d}t$ 表示时间的微小变化，$t=x, x+\mathrm{d}t, x+2\mathrm{d}t,\cdots, T-\mathrm{d}t, T$。

使用我们引入的符号，我们可以说速度方程为 $v(t)=k/st=(k/s)(1/t)$。为计算头1个小时扫雪车前进的距离 d_1，我们从 $t=x$ 到$t=x+1$（时间以小时度量）取 $v(t)$ 的积分：

$$d_1=\int_x^{x+1}\frac{k}{s}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \text{。}$$

因为k和s都是常数，我们可以将 k/s 从积分内移出，因而方程变为

$$d_1=\frac{k}{s}\int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \text{。}$$

现在回忆一下微积分知识，$1/t$的不定积分为$\ln(t)$，因此，

$$d_1=\frac{k}{s}\ln(t)\Big|_x^{x+1}=\frac{k}{s}(\ln(x+1)-\ln(x))。$$

准确运用同样的分析，第2个小时前进的距离为

$$d_2=\frac{k}{s}\ln(t)\Big|_{x+1}^{x+2}=\frac{k}{s}(\ln(x+2)-\ln(x+1))。$$

我们从麦吉利卡迪先生口中得知扫雪车在头1个小时前进的距离为第2个小时的2倍，因此，我们知道$d_1=2d_2$，即

$$k/s(\ln(x+1)-\ln(x))=2k/s(\ln(x+2)-\ln(x+1))。$$

消去方程两边的常数，上述方程简化为

$$\begin{aligned}\ln(x+1)-\ln(x)&=2(\ln(x+2)-\ln(x+1))\\&=2\ln(x+2)-2\ln(x+1),\end{aligned}$$

$$3\ln(x+1)=2\ln(x+2)+\ln(x)。$$

回想$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$以及$a\ln(b)=\ln(b^a)$，上述方程又可写成

$$\ln((x+1)^3)=\ln((x+2)^2x)。$$

现在对两边取幂，我们得到

$$(x+1)^3=x(x+2)^2。$$

将两边展开，得

$$x^3+3x^2+3x+1=x^3+4x^2+4x。$$

简化之，得到二次方程

$$x^2+x-1=0,$$

其解为

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}。$$

只有正数解具有物理意义，因此我们得到

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}。$$

它表示从开始下雪到扫雪车开始工作之间间隔的小时数，算出来约37分钟，意味着雪是在大约早晨5:23开始下的。

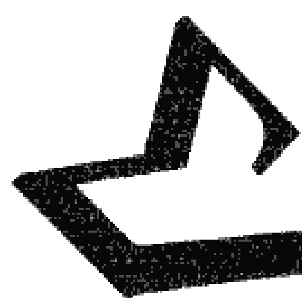
这就给了皮克尔斯足够的时间洗劫保险箱并在下雪前将赃物运回家。这样的分析正是塞巴斯蒂安法官签署搜查证所需的。结果被盗的珠宝从皮克尔斯的公寓中搜出，皮克尔斯终于被捕了。

在结束本题前，让我们继续体会一下数学的力量。我们勿需知道任意特定时间点积雪的厚度，也不必知道扫雪车清除积雪的速度，甚至不必知道雪下的速度，就可以计算出雪是什么时候开始下的！这简直是奇迹！

结语

至此，我们的旅行就要结束了。我真诚地希望你享受到了和拉维的智力角逐。毋庸置疑，这些故事有些似乎有点儿牵强，甚至有些不合常情，但我的愿望是用这些故事增加其中的数学知识的趣味性和实用性。我经常听到被数学家庭作业激怒的朋友们说："我啥时候会用到这些乏味的东西？"尽管他们说这话时并不是想要得到答案，我还是希望这本小册子能给出那么一点点提示。不过，我要重复我在前言中所说的，我喜欢数学，并非因为它的实用，而是因为它的纯美！

我希望，不管你怎么看待这些故事，至少会发现其中有些颠覆了你的第一印象，与你的直觉相背，使你感觉意外。如果是这样，你就触摸到了数学的趣味和魔力。从此，你就可以在数学的天空自由翱翔了！



关于数学问题的说明

这里想简单地介绍一下本书中的故事涉及的数学问题的出处。这并不意味着所引的资源是问题的原始出处，绝大多数通俗数学问题是不大可能找到原始来源的。对解数学趣题感兴趣的人们还可以把这里提到的我认为非常棒的文献拿来参考。

西克莫里凶杀疑案

我几次读到其中的数学题。在保罗·蔡茨（Paul Zeitz）的优秀著作《解题艺术与技巧》[①]（*The Art and Craft of Problem Solving*, John Wiley and Sons, New York, 1999, pp. 84-85）中对此有精彩的讨论。

西瓜欺诈案

我已记不起这个可爱的问题的来源了。我读到了这个问题，就立刻被它吸引住了。

秃鹰被盗案

其中的问题基于保罗·蔡茨（Paul Zeitz）在《解题艺术与

① 本书有中文版，由人民邮电出版社出版。——编者注

技巧》(p.65)中给出的类似问题。不过那本书中只是留做习题，并没有给出解答。

篮球联赛舞弊案

这个问题没有出处，因为它是我虚构出来的问题。它是一个组合学问题，这是我最喜爱的数学领域。

月球岩石掉包案

问题的提出和大部分解答都取自安东尼·加德纳（Anthony Gardiner）的迷人著作《发现数学：研究的艺术》(*Discovering Mathematics: The Art of Investigation*，Oxford University Press, Oxford, UK, 1987, 第12~15章)。

核文件失窃案

这个故事的核心数学问题流传很广，我在几个地方都看到过。在罗斯·杭斯伯格（Ross Honsberger）的《世界各地数学经典故事》(*Mathematical Chestnuts From Around The World*, *Mathematical Association of America*, Washington, DC, 2001, p.31）中可找到它及其完美答案。拓展部分的智力问题取自杭斯伯格博士的另一部优秀著作《数学小品》(*More Mathematical Morsels*, MAA, Washington, DC, 1991, p.235)。

赌场命案

其中的问题基于艾尔弗雷德·波萨门提尔（Alfred Posamentier）的精彩作品《数学魔术师：脑筋急转弯》(*Math

Charmers: Tantalizing Tidbits for the Mind，Prometheus Books, Amherst, NY, 2003, p. 233)。拓展1中的材料部分取自史蒂芬·卡克威斯基（Stephen Kaczkowski）对某期《大学数学学报》（*College Mathematics Journal*, Vol. 36, N0. 4, September 2005, p. 334）上的第782个问题的解答。

赛马场赖账案'

其中的问题没有确切的出处——它是我在读了一些组合学书后虚构出来的。有关错位排列的内容在任何组合学书中都会提到。我认为其中的一部优秀之作当属伊万·尼文（Ivan Niven）的《选择中的数学》（*Mathematics of Choice*, MAA, Washington, DC, 1965)。问题的拓展2非常难，期望值部分的解基于1987年国际数学奥林匹克竞赛的一道相关题目的解。问题和答案可在伊斯特万·赖曼（Istvan Reiman）的《1959–1999年国际数学奥林匹克竞赛》中找到（*International Mathematical Olympiad 1959-1999*, Wimbledon Publishing, Wimbledon, UK, 2001, pp. 329-330)。

保龄球参赛名额之争

其中的问题没有特别的出处。克劳斯·彼得斯先生随便给我出了这道题，我把它做出来了，并用到了故事中。

钢珠伤人案

其中的问题基于匈牙利的一道类似的数学竞赛题，那还是1900年的事！竞赛的名称为厄特沃什竞赛，可在约瑟夫·柯萨

克（Joseph Kurschak）的《匈牙利数学问题第1辑：1894–1905年厄特沃什竞赛》（*Hungarian Problem Book I: Based on the Eotvos Competitions 1894-1905*, MAA, Washington, DC, 1963）中找到该问题。

化工厂液罐泄漏案

这个故事的核心数学问题取自唐纳德 · R · 麦克（Donald R. Mack）的一部有关数学谜题的好书《IEEE非官方数理头脑风暴》（*The Unofficial IEEE Brainbuster Gamebook*, IEEE Press, New York, 1992）。书中只给出了部分解，

“不知道”的冤案

其中的奇妙问题可在斯维托斯拉夫 · 萨维切夫（Svetoslav Savchev）和蒂图 · 安德里斯库（Titu Andreescu）的漂亮图书《数学缩微》（*Mathematical Miniatures*, MAA, Washington, DC, 2003, Problem 21）中找到。

城市丛林枪击案

其中的精彩问题有时被称做果树问题，它的答案可在罗斯 · 杭斯伯格（Ross Honsberger）的《数学瑰宝1》（*Mathematical Gems I*, MAA, Washington, DC, 1973, pp. 43-53）的第4章找到，也可在A · M · 耶格罗姆（A. M. Yaglom）和I · M · 耶格罗姆（I. M. Yaglom）的《用初等解法挑战数学问题》（*Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, Holden-Day Press, San Francisco, 1967）第2卷中找

到。

珠宝失窃案

其中的问题显然在许多地方出版过。我是在里克·吉尔曼（Rick Gillman）编辑的《数学友谊赛》（*A Friendly Mathematics Competition*, MAA, Washington, DC, 2003, pp. 96-97）中看到的。不过，那里的答案不好懂，书中的题目对高中生来说有点儿难。我用的方法取自迈克尔·沙克尔福德（Michael Shackleford）在http://mathproblems.info/prob2s.htm上粘贴的巧妙解法。